

- 10.7 群  $G$  的换位子子群  $C$  是含有所有换位子的最小子群. 证明换位子子群是特征子群(见练习 10.6), 且  $G/C$  是阿贝尔群.
- 10.8 确定下列群的换位子子群(练习 10.7):  
 (a)  $SO_2$  (b)  $O_2$  (c) 平面等距群  $M$  (d)  $S_n$  (b)  $SO_3$
- 10.9 令  $G$  是元素在域  $F_p$  里的  $3 \times 3$  上三角矩阵群且对角元均为 1. 对每个素数  $p$ , 确定  $G$  的中心, 换位子子群(练习 10.6)和元素的阶.
- 10.10 令  $\mathcal{F}$  是  $x, y$  上的自由群, 且设  $\mathcal{R}$  是含有换位子  $xyx^{-1}y^{-1}$  的最小正规子群.  
 (a) 证明  $x^2y^2x^{-2}y^{-2}$  属于  $\mathcal{R}$ .  
 (b) 证明  $\mathcal{R}$  是  $\mathcal{F}$  的换位子子群(练习 10.7).

225

### 第十一节 托德-考克斯特算法

- 11.1 完善例 7.11.8 给出的群是 3 阶循环群的证明.
- 11.2 用托德-考克斯特算法证明由关系(7.8.2)定义的群的阶为 12, 且由关系(7.7.8)定义的群的阶为 21.
- 11.3 用托德-考克斯特算法分析由两个元素  $x, y$  与下列关系生成的群. 可能的话确定群的阶和群:  
 (a)  $x^2=y^2=1, xyx=yxy$  (b)  $x^3=y^3=1, xyx=yxy$   
 (c)  $x^4=y^2=1, xyx=yxy$  (d)  $x^4=y^4=x^2y^2=1$   
 (e)  $x^3=1, y^2=1, yxyxy=1$  (f)  $x^3=y^3=yxyxy=1$   
 (g)  $x^4=1, y^3=1, xy=y^2x$  (h)  $x^7=1, y^3=1, yx=x^2y$   
 (i)  $x^{-1}yx=y^{-1}, y^{-1}xy=x^{-1}$  (j)  $y^3=1, x^2yxy=1$
- 11.4  $G$  的子群  $H$  的正规性如何反映在展示陪集上作用的表里?
- 11.5 令  $G$  是由元素  $x, y$  与关系  $x^4=1, y^3=1, x^2=yxy$  生成的群. 用两种方法证明这个群是平凡的: 用托德-考克斯特算法和直接利用关系.
- 11.6 三角群  $G^{pqr}$  是群  $\langle x, y, z \mid x^p, y^q, z^r, xyz \rangle$ , 其中  $p \leq q \leq r$  是正整数. 在每种情形里, 证明三角群同构于下面列出的群.  
 (a) 二面体群  $D_n$ , 当  $p, q, r=2, 2, n$   
 (b) 八面体群, 当  $p, q, r=2, 3, 4$   
 (c) 二十面体群, 当  $p, q, r=2, 3, 5$
- 11.7 令  $\Delta$  表示等边三角形, 且设  $a, b, c$  是关于  $\Delta$  的三个边的反射. 设  $x=ab, y=bc, z=ca$ . 证明  $x, y, z$  生成三角群(练习 11.6).
- 11.8 (a) 证明由元素  $x, y, z$  与关系  $x^2=y^3=z^5=1, xyz=1$  生成的群  $G$  的阶为 60.  
 (b) 令  $H$  是由  $x$  与  $zyz^{-1}$  生成的子群. 确定  $G$  在  $G/H$  上的置换表示, 并确定  $H$ .  
 (c) 证明  $G$  同构于交错群  $A_5$ .  
 (d) 令  $K$  是  $G$  的由  $x$  与  $yxz$  生成的子群. 确定  $G$  在  $G/K$  上的置换表示, 并确定  $K$ .

226

### 杂题

- M.1 对于由阶为 2 的两个元素  $x$  与  $y$  生成的群进行分类.  
 提示: 利用元素  $z=xy$  较为方便.

- M. 2 用表示(6.4.3)确定二面体群  $D_n$  中子群  $H = \{1, y\}$  的双陪集(见练习 M. 9)  $HgH$ . 证明每个双陪集或有两个或有四个元素.
- M. 3 (a) 设群  $G$  可迁地作用在集合  $S$  上, 且  $H$  是  $S$  的元素  $s_0$  的稳定子. 考虑  $G$  在  $S \times S$  上由  $g(s_1, s_2) = (gs_1, gs_2)$  定义的作用. 在  $G$  中  $H$  的双陪集与  $S \times S$  中  $G$ -轨道之间建立一一对应.  
 (b) 对于  $G$  是二面体群  $D_5$  与  $S$  是五边形顶点的集合的情形具体给出这个对应.  
 (c) 在  $G = T$  与  $S$  是四面体的边集时给出这个对应.
- M. 4 令  $H$  和  $K$  是群  $G$  的子群, 且  $H \subset K$ . 设  $H$  在  $K$  里是正规的且  $K$  在  $G$  里是正规的.  $H$  在  $G$  里是正规的吗?
- M. 5 令  $H$  和  $N$  是群  $G$  的子群, 且设  $N$  是正规子群.  
 (a) 确定典型同态  $\pi: G \rightarrow G/N$  到子群  $H$  和  $HN$  的限制的核.  
 (b) 应用第一同构定理到这些限制, 证明第二同构定理:  $H/(H \cap N)$  同构于  $(HN)/N$ .
- M. 6 令  $H$  和  $N$  是群  $G$  的正规子群, 使得  $H \supset N$ . 设  $\overline{H} = H/N$  与  $\overline{G} = G/N$ .  
 (a) 证明  $\overline{H}$  是  $\overline{G}$  的正规子群.  
 (b) 用合成同态  $G \rightarrow \overline{G} \rightarrow \overline{G}/\overline{H}$  证明第三同构定理:  $G/H$  同构于  $\overline{G}/\overline{H}$ .
- M. 7 令  $p_1, p_2$  是集合  $S = \{1, 2, \dots, n\}$  的置换, 且设  $U_i$  是  $S$  的不为  $p_i$  固定不动的指标的子集. 证明:  
 (a) 如果  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ , 则换位子  $p_1 p_2 p_1^{-1} p_2^{-1}$  是恒等的.  
 (b) 如果  $U_1 \cap U_2$  恰含有一个元素, 则换位子  $p_1 p_2 p_1^{-1} p_2^{-1}$  是 3-循环.
- M. 8 令  $H$  是群  $G$  的子群. 证明当  $G$  是无限群时, 左陪集的个数等于右陪集的个数.
- M. 9 令  $x$  是奇数阶群的非恒等元的元素. 证明元素  $x$  与  $x^{-1}$  是共轭的. 227
- M. 10 设  $G$  是可迁地作用在阶  $\geq 2$  的集合  $S$  上的有限群, 证明  $G$  含有一个元素  $g$ , 其不能固定  $S$  的任何元素不动.
- M. 11 确定  $GL_2(\mathbf{Z})$  里 2 阶元素的共轭类.
- M. 12 ( $SL_2$  的类方程) 在  $SL_2(F)$  里, 许多共轭类(尽管不是所有)含有形如  $A = \begin{bmatrix} & -1 \\ 1 & a \end{bmatrix}$  的矩阵.  
 (a) 在  $SL_2(\mathbf{F}_5)$  里确定  $a = 0, 1, 2, 3, 4$  时矩阵  $A$  的中心化子.  
 (b) 确定  $SL_2(\mathbf{F}_5)$  的类方程.  
 (c) 在  $\mathbf{F}_p$  里形如  $x^2 + axy + y^2 = 1$  的方程可能有多少个解? 要分析它, 可从置  $y = \lambda x + 1$  开始. 对大多数的  $\lambda$  值, 有两个解, 其中一个为  $x = 0, y = 1$ .  
 (d) 确定  $SL_2(\mathbf{F}_p)$  的类方程. 228

## 第八章 双线性型

我认为公式对于无经验的人是冷漠和不受欢迎的。

—Benjamin Peirce

### 第一节 双线性型

在第五章里讨论了  $\mathbf{R}^n$  上的点积  $(X \cdot Y) = X'Y = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$ . 它是对称的:  $(Y \cdot X) = (X \cdot Y)$ , 且是正定的: 对每个  $X \neq 0$ ,  $(X \cdot X) > 0$ . 在本章我们研究几个类似的点积. 最重要的一个是对称型与埃尔米特型. 本章的所有向量空间均假设是有限维的.

令  $V$  是实向量空间.  $V$  上的双线性型是两个向量变量的实值函数——映射  $V \times V \rightarrow \mathbf{R}$ . 给定一对向量  $v, w$ , 这个型给出一个实数, 通常记为  $\langle v, w \rangle$ . 双线性型对每个变量都是线性的:

$$\begin{aligned} \text{【8.1.1】} \quad \langle rv_1, w_1 \rangle &= r\langle v_1, w_1 \rangle, & \langle v_1 + v_2, w_1 \rangle &= \langle v_1, w_1 \rangle + \langle v_2, w_1 \rangle \\ \langle v_1, rw_1 \rangle &= r\langle v_1, w_1 \rangle, & \langle v_1, w_1 + w_2 \rangle &= \langle v_1, w_1 \rangle + \langle v_1, w_2 \rangle \end{aligned}$$

对  $V$  中的所有  $v_i$  与  $w_i$  和所有实数  $r$  成立. 叙述这个性质的另一个方式为型与每个变量的线性组合是相容的:

$$\begin{aligned} \text{【8.1.2】} \quad \langle \sum x_i v_i, w \rangle &= \sum x_i \langle v_i, w \rangle \\ \langle v, \sum w_j y_j \rangle &= \sum \langle v, w_j \rangle y_j \end{aligned}$$

对所有向量  $v_i$  与  $w_i$  和所有实数  $x_i$  与  $y_i$  成立. (把标量写在第二个变量外的右边常常是方便的.)

$\mathbf{R}^n$  上的型定义为

$$\text{【8.1.3】} \quad \langle X, Y \rangle = X'AY$$

其中  $A$  是  $n \times n$  矩阵, 这是双线性型的一个例子. 点积是  $A=I$  的情形, 并且当用实列向量讨论时, 总是假设型是点积, 除非已指定了不同的型.

229

如果给定  $V$  的基  $B=(v_1, \dots, v_n)$ , 则双线性型可通过型的矩阵与(8.1.3)类型的型联系起来. 这个矩阵是  $A=(a_{ij})$ , 其中

$$\text{【8.1.4】} \quad a_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$$

**【8.1.5】命题** 令  $\langle, \rangle$  是向量空间  $V$  上的双线性型, 设  $B=(v_1, \dots, v_n)$  是  $V$  的基, 且设  $A$  是双线性型关于这个基的矩阵. 如果  $X$  与  $Y$  分别是向量  $v$  与  $w$  的坐标向量, 则

$$\langle v, w \rangle = X'AY$$

**证明** 如果  $v=BX$  与  $w=BY$ , 则

$$\langle v, w \rangle = \left\langle \sum_i v_i x_i, \sum_j v_j y_j \right\rangle = \sum_{i,j} x_i \langle v_i, v_j \rangle y_j = \sum_{i,j} x_i a_{ij} y_j = X'AY \quad \blacksquare$$

一个双线性型是对称的, 如果对  $V$  中的所有  $v$  与  $w$  有  $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$ ; 是斜对称的, 如果对  $V$  中的所有  $v$  与  $w$  有  $\langle v, w \rangle = -\langle w, v \rangle$ . 当提及对称型时, 我们指的是双线性对称型, 类似地, 提及斜对称型就蕴含双线性性.

### 【8.1.6】引理

(a) 令  $A$  是  $n \times n$  矩阵, 型  $X'AY$  是对称的: 对所有  $X$  与  $Y$ ,  $X'AY = Y'AX$  当且仅当矩阵  $A$  是对称的, 即  $A' = A$ .

(b) 双线性型  $\langle, \rangle$  是对称的当且仅当它的关于任意基的矩阵是对称矩阵.

当把词对称换为斜对称时, 类似的叙述也成立.

#### 证明

(a) 假设  $A = (a_{ij})$  是对称矩阵. 把  $X'AY$  看成  $1 \times 1$  矩阵, 它等于其转置. 这样,  $X'AY = (X'AY)' = Y'A'X = Y'AX$ . 因此, 型是对称的. 要推导另一面的含义, 注意  $e_i' A e_j = a_{ij}$ , 而  $e_j' A e_i = a_{ji}$ . 为使型是对称的, 必须有  $a_{ij} = a_{ji}$ .

(b) 因为  $\langle v, w \rangle = X'AY$ , 故由 (a) 可得 (b) 的结论. ■

基变换在型矩阵上的效果用通常的方法确定.

【8.1.7】命题 令  $\langle, \rangle$  是实向量空间  $V$  上的双线性型, 设  $A$  与  $A'$  是型关于两个基  $B$  与  $B'$  的矩阵. 如果  $P$  是基变换的矩阵, 使得  $B' = BP$ , 则

$$A' = P'AP$$

证明 令  $X$  与  $X'$  是向量  $v$  关于基  $B$  与  $B'$  的坐标向量, 则  $v = BX = B'X'$ , 且  $PX' = X$ . 用类似的记号,  $w = BY = B'Y'$ ,

$$\langle v, w \rangle = X'AY = (PX')'A(PY') = X'^t(P'AP)Y'$$

这把  $P'AP$  与型的矩阵关于基  $B'$  等同起来. ■

230

【8.1.8】推论 设  $A$  是双线性型关于基的矩阵, 则关于不同基表示同一型的矩阵为  $P'AP$ , 其中  $P$  可以是任意可逆矩阵.

注意 这里有一点很重要. 给出基时, 线性算子与双线性型均由矩阵描述. 可猜想线性算子理论与双线性型理论以某种方式是等价的. 但它们是不等价的. 当做基变换时, 双线性型  $X'AY$  的矩阵变为  $P'AP$ , 而线性算子  $Y = AX$  的矩阵变为  $P^{-1}AP$ . 关于新基所得的矩阵多数时候是不同的.

## 第二节 对 称 型

令  $V$  是实向量空间.  $V$  上对称型是正定的, 如果对所有非零向量  $v$  有  $\langle v, v \rangle > 0$ ; 是正半定的, 如果对所有非零向量  $v$  有  $\langle v, v \rangle \geq 0$ . 负定与负半定可类似地进行定义. 点积是  $\mathbb{R}^n$  上对称的正定型.

不是正定的对称型称为不定的. 洛仑兹型

### 【8.2.1】

$$\langle X, Y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 - x_4 y_4$$

在“时-空” $\mathbb{R}^4$  上是不定对称型, 其中  $x_4$  是“时间”坐标, 且光的速度正规化为 1. 它关于  $\mathbb{R}^4$

的标准基的矩阵为

【8.2.2】

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix}$$

作为学习对称型的入门,我们问,当变换坐标的时候,点积会发生什么情况?从标准基  $E$  到新基  $B'$  的基变换的效果已由命题 8.1.7 给出. 如果  $B' = EP$ , 则点积矩阵  $I$  变为  $A' = P'IP = P'P$ , 或根据型, 如果  $PX' = X$ ,  $PY' = Y$ , 则

【8.2.3】

$$X'Y = X'^t A' Y', \text{ 其中 } A' = P'P$$

如果基变换是正交的, 则  $P'P$  是恒等矩阵, 且  $(X \cdot Y) = (X' \cdot Y')$ . 但在基的一般变换下, 点积公式如同所显示的那样变换.

这就产生了一个问题: 什么样的双线性型  $X'AY$  等价于点积, 即关于  $\mathbf{R}^n$  的某个基它们表示点积? 公式(8.2.3)给出一个理论上的答案.

【8.2.4】推论 表示等价于点积的型  $\langle X, Y \rangle = X'AY$  的矩阵  $A$  是那些对某个可能的矩阵  $P$  可写成积  $P'P$  的矩阵.

231

在我们确定什么样的矩阵能写成这样的积之前, 这个答案不是令人满意的.  $A$  必须满足的一个条件很简单: 它必须是对称的, 因为  $P'P$  总是对称矩阵. 另一个条件来自于点积是正定的事实.

与对称型的术语类似, 实对称矩阵  $A$  称为正定的, 如果对所有非零列向量  $X$  有  $X'AX > 0$ . 如果型  $X'AY$  等价于点积, 则矩阵  $A$  是正定的.

两个条件, 即对称性与正定性刻画了表示点积的矩阵.

【8.2.5】定理 实  $n \times n$  矩阵  $A$  的下列性质是等价的:

- (i) 关于  $\mathbf{R}^n$  的某个基, 型  $X'AY$  表示点积.
- (ii) 存在可逆矩阵  $P$  使得  $A = P'P$ .
- (iii) 矩阵  $A$  是对称与正定的.

我们已经知道(i)与(ii)是等价的(推论 8.2.4)且(i)蕴含着(iii). 在第四节我们将证明(iii)蕴含着(i)(见(8.4.18)).

### 第三节 埃尔米特型

将对称型的概念扩展到复向量空间的最有用的途径是埃尔米特型. 复向量空间  $V$  上的埃尔米特型是一个映射  $V \times V \rightarrow \mathbf{C}$ , 记为  $\langle v, w \rangle$ , 对第一个变量它是共轭线性的, 对第二个变量它是线性的和埃尔米特对称的:

【8.3.1】

$$\begin{aligned} \langle cv_1, w_1 \rangle &= \bar{c} \langle v_1, w_1 \rangle, & \langle v_1 + v_2, w_1 \rangle &= \langle v_1, w_1 \rangle + \langle v_2, w_1 \rangle \\ \langle v_1, cw_1 \rangle &= c \langle v_1, w_1 \rangle, & \langle v_1, w_1 + w_2 \rangle &= \langle v_1, w_1 \rangle + \langle v_1, w_2 \rangle \end{aligned}$$

$$\langle w_i, v_i \rangle = \overline{\langle v_i, w_i \rangle}$$

对  $V$  中的所有  $v_i$  与  $w_i$  和所有复数  $c$  成立, 其中上划线表示复共轭. 同双线性型 (8.1.2) 一样, 这个条件可用变量的线性组合表示出来:

$$\begin{aligned} \text{【8.3.2】} \quad & \langle \sum x_i v_i, w \rangle = \sum \bar{x}_i \langle v_i, w \rangle \\ & \langle v, \sum w_j y_j \rangle = \sum \langle v, w_j \rangle y_j \end{aligned}$$

对任意向量  $v_i$  与  $w_i$  和任意复数  $x_i$  与  $y_i$  成立. 由于埃尔米特对称性, 故  $\langle v, v \rangle = \overline{\langle v, v \rangle}$ , 所以, 对所有向量  $v$ ,  $\langle v, v \rangle$  是一个实数.

$\mathbf{C}^n$  上的标准埃尔米特型是

$$\text{【8.3.3】} \quad \langle X, Y \rangle = X^* Y = \bar{x}_1 y_1 + \cdots + \bar{x}_n y_n$$

其中记号  $X^*$  代表  $X = (x_1, \dots, x_n)^t$  的共轭转置. 当在  $\mathbf{C}^n$  上讨论时, 总是假设型是标准埃尔米特型, 除非指定其他型.

复共轭造成复杂化的原因是  $\langle X, X \rangle$  对每个非零复向量  $X$  变成了正实数. 如果用复  $n$  维向量与实  $2n$  维向量之间的一一对应

$$\text{【8.3.4】} \quad (x_1, \dots, x_n)^t \leftrightarrow (a_1, b_1, \dots, a_n, b_n)^t$$

其中  $x_v = a_v + b_v i$ , 则  $\bar{x}_v = a_v - b_v i$ , 并且

$$\langle X, X \rangle = \bar{x}_1 x_1 + \cdots + \bar{x}_n x_n = a_1^2 + b_1^2 + \cdots + a_n^2 + b_n^2$$

因此,  $\langle X, X \rangle$  是对应的实向量的平方长度, 是正实数.

对任意向量  $X$  与  $Y$ , 点积的对称性质由埃尔米特对称替换:  $\langle Y, X \rangle = \overline{\langle X, Y \rangle}$ . 记住当  $X \neq Y$  时,  $\langle X, Y \rangle$  可能是复数, 而对应的实向量的点积是实的. 虽然  $\mathbf{C}^n$  的元素与  $\mathbf{R}^{2n}$  的元素如上所述是一一对应的, 但这两个空间是不等价的, 因为复数的标量乘法在  $\mathbf{R}^{2n}$  上没有定义.

复矩阵  $A = (a_{ij})$  的伴随  $A^*$  是转置矩阵  $A^t$  的复共轭, 是上面列向量使用的记号. 所以,  $A^*$  的  $i, j$  元素是  $\bar{a}_{ji}$ . 例如,  $\begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 2 & i \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1-i & -i \end{bmatrix}$ .

下面是一些计算伴随矩阵的规则:

$$\text{【8.3.5】} \quad (cA)^* = \bar{c}A^*, \quad (A+B)^* = A^* + B^*, \quad (AB)^* = B^*A^*, \quad A^{**} = A$$

方阵  $A$  是埃尔米特的(或自伴随的), 如果

$$\text{【8.3.6】} \quad A^* = A$$

埃尔米特矩阵  $A$  的元素满足关系  $a_{ji} = \bar{a}_{ij}$ . 它的对角元是实的, 且对角线下面的元素是对角线上面元素的复共轭:

$$\text{【8.3.7】} \quad A = \begin{bmatrix} r_1 & & a_{ij} \\ & \ddots & \\ \bar{a}_{ij} & & r_n \end{bmatrix}, \quad r_i \in \mathbf{R}, \quad a_{ij} \in \mathbf{C}$$

例如,  $\begin{bmatrix} 2 & i \\ -i & 3 \end{bmatrix}$  是埃尔米特矩阵. 实矩阵是埃尔米特矩阵当且仅当它是对称矩阵.

埃尔米特型关于基  $B=(v_1, \dots, v_n)$  的矩阵的定义同双线性型的一样. 它是  $A=(a_{ij})$ , 其中  $a_{ij}=\langle v_i, v_j \rangle$ .  $C^n$  上标准埃尔米特型的矩阵是恒等矩阵.

**【8.3.8】命题** 令  $A$  是复向量空间  $V$  上的埃尔米特型  $\langle, \rangle$  关于基  $B$  的矩阵. 如果  $X$  与  $Y$  分别是向量  $v$  与  $w$  的坐标向量, 则  $\langle v, w \rangle = X^*AY$ , 且  $A$  是埃尔米特矩阵. 反之, 如果  $A$  是埃尔米特矩阵, 则在  $C^n$  上由  $\langle X, Y \rangle = X^*AY$  定义的型是埃尔米特型.

233

**证明** 类似于命题 8.1.5 的证明. ■

回忆如果型是埃尔米特型, 则  $\langle v, v \rangle$  是实数. 埃尔米特型是正定的, 如果对每个非零向量  $v$ ,  $\langle v, v \rangle$  是正的. 埃尔米特矩阵是正定的, 如果对每个非零复列向量  $X$ ,  $X^*AX$  是正的. 埃尔米特型是正定的当且仅当它关于任意一个基的矩阵是正定的.

像通常一样, 通过替换  $PX'=X$  与  $PY'=Y$  来确定埃尔米特型的矩阵中基变换  $B'=BP$  的规则:

$$X^*AY = (PX')^*A(PY') = X'^*(P^*AP)Y'$$

型关于新基的矩阵是

$$\mathbf{【8.3.9】} \quad A' = P^*AP$$

**【8.3.10】推论**

(a) 令  $A$  是埃尔米特型关于一个基的矩阵. 代表同一个型的关于不同基的矩阵是那些形如  $A'=P^*AP$  的矩阵, 其中  $P$  可以是任意可逆复矩阵.

(b)  $C^n$  里基变换  $B'=EP$  把标准埃尔米特型  $X^*Y$  变为  $X'^*A'Y'$ , 其中  $A'=P^*P$ .

下一个定理给出埃尔米特矩阵的第一个特殊性质.

**【8.3.11】定理** 埃尔米特矩阵  $A$  的特征值、迹与行列式均是实数.

**证明** 因为迹与行列式可用特征值表示, 故只要证明埃尔米特矩阵  $A$  的特征值是实数就够了. 令  $X$  是  $A$  的伴随于特征值  $\lambda$  的特征向量, 则

$$X^*AX = X^*(AX) = X^*(\lambda X) = \lambda X^*X$$

注意  $(\lambda X)^* = \bar{\lambda}X^*$ . 由于  $A^*=A$ , 故

$$X^*AX = (X^*A)X = (X^*A^*)X = (AX)^*X = (\lambda X)^*X = \bar{\lambda}X^*X$$

因此,  $\lambda X^*X = \bar{\lambda}X^*X$ . 因为  $X^*X$  是正实数, 故它不等 0. 所以,  $\lambda = \bar{\lambda}$ . 这就意味着  $\lambda$  是实数. ■

请仔细阅读这个证明. 该证明很简单, 但它却如此巧妙以致似乎难以让人相信. 下面是使人大吃一惊的推论:

**【8.3.12】推论** 实对称矩阵的特征值是实数.

**证明** 当把实对称矩阵看成复矩阵时, 它是埃尔米特矩阵. 所以, 该推论可由定理得到. ■

234

不借助复矩阵是很难证明这个推论的, 虽然对于  $2 \times 2$  实对称矩阵可以直接验证结论. 一个矩阵  $P$  满足

$$\mathbf{【8.3.13】} \quad P^*P = I \quad (\text{或 } P^* = P^{-1})$$

则称该矩阵为酉矩阵. 一个矩阵  $P$  是酉矩阵当且仅当它的列  $P_1, \dots, P_n$  关于标准埃尔米特型是正交的, 亦即当且仅当  $i \neq j, P_i^* P_i = 1, P_i^* P_j = 0$ . 例如, 矩阵  $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{bmatrix}$  是酉矩阵.

酉矩阵构成复一般线性群的子群, 称为酉群, 记之为  $U_n$ :

$$[8.3.14] \quad U_n = \{P \mid P^* P = I\}$$

我们已经知道  $\mathbf{R}^n$  中基变换保持点积当且仅当基变换矩阵是正交的(5.1.14). 类似地,  $\mathbf{C}^n$  中基变换保持标准埃尔米特型  $X^* Y$  当且仅当基变换矩阵是酉矩阵(见(8.3.10)(b)).

## 第四节 正交性

本节我们同时描述实向量空间上的对称(双线性)型与复向量空间上的埃尔米特型. 本节假设已给出具有对称型的有限维实向量空间  $V$ , 或者具有埃尔米特型的有限维复向量空间  $V$ . 不假设已给出的型是正定的. 涉及对称型表示  $V$  是实向量空间, 而涉及埃尔米特型表示  $V$  是复向量空间. 尽管我们做的每件事都能应用于两种情形, 但首次读到这一点时最好考虑实向量空间上的对称型.

为了包含埃尔米特型, 需在~~一些~~符号上边放一横杠. 因为复共轭在实数上是恒等作用, 故当考虑对称型时可忽略横杠. 还有, 实矩阵的伴随与它的转置是相等的. 当矩阵  $A$  是实矩阵时,  $A^*$  是  $A$  的转置.

假设已知有限维向量空间  $V$  上的对称或埃尔米特型. 用来研究型的基本概念是正交.

注 两个向量  $v$  与  $w$  是正交的(写为  $v \perp w$ ), 如果

$$\langle v, w \rangle = 0$$

当型是点积时这扩展了之前给出的定义. 注意  $v \perp w$  当且仅当  $w \perp v$ .

几何上实向量的正交既依赖于型也依赖于基. 特别之处在于, 当型是不定的时, 非零向量  $v$  可能是自正交的:  $\langle v, v \rangle = 0$ . 对每个对称型, 与其理解正交的几何意义, 不如代数上用好正交的定义,  $\langle v, w \rangle = 0$ .

如果  $W$  是  $V$  的子空间, 可把  $V$  上的型限制到  $W$  上, 简单地说就是, 取同一个型但仅用  $W$  中的向量. 显然, 如果  $V$  上的型是对称的、埃尔米特的或正定的, 则它在  $W$  上的限制将具有同一性质.

注  $V$  的子空间  $W$  的正交空间常记为  $W^\perp$ , 它是与  $W$  的每个向量都正交的向量  $v$  的子空间, 或符号上, 使得  $v \perp W$ :

$$[8.4.1] \quad W^\perp = \{v \in V \mid \langle v, w \rangle = 0, \text{ 对所有 } w \in W\}.$$

注  $V$  的正交基  $B = (v_1, \dots, v_n)$  是一个基, 其向量是相互正交的: 对所有指标  $i$  与  $j$  且  $i \neq j, \langle v_i, v_j \rangle = 0$ . 型关于正交基的矩阵是对角阵, 且型是非退化的(见下面)当且仅当矩阵的对角元  $\langle v_i, v_i \rangle$  是非零的(命题 8.4.4(b)).

注  $V$  中迷向向量  $v$  是与  $V$  中每个向量都正交的向量. 型的迷向空间  $N$  是迷向向量的



集合. 迷向空间可描述为与整个空间  $V$  正交的空间:

$$N = \{v | v \perp V\} = V^\perp$$

**注**  $V$  上的型是非退化的, 如果它的迷向空间是零空间  $\{0\}$ . 意思是对每个非零向量  $v$ , 存在一个向量  $v'$  使得  $\langle v, v' \rangle \neq 0$ . 不是非退化的型是退化的. 最有意思的型是非退化型.

**注**  $V$  上的型在子空间  $W$  上是非退化的, 如果它对  $W$  的限制是非退化型, 亦即, 对每个非零向量  $w \in W$ , 还存在向量  $w' \in W$  使得  $\langle w, w' \rangle \neq 0$ . 一个型可能在子空间上是退化的, 尽管在整个空间上它是非退化的, 反之亦然.

**【8.4.2】引理** 型在  $W$  上是非退化的当且仅当  $W \cap W^\perp = \{0\}$ .

根据非退化型有一个向量相等的重要判别法.

**【8.4.3】命题** 令  $\langle, \rangle$  是  $V$  上非退化对称型或埃尔米特型, 设  $v$  与  $v'$  是  $V$  中的向量. 如果  $\langle v, w \rangle = \langle v', w \rangle$ , 则对所有向量  $w \in V$ , 有  $v = v'$ .

**证明** 如果  $\langle v, w \rangle = \langle v', w \rangle$ , 则  $v - v'$  与  $w$  正交. 如果这对所有向量  $w \in V$  是成立的, 则  $v - v'$  是迷向向量. 因为型是非退化的, 故  $v - v' = 0$ . ■

**【8.4.4】命题** 令  $\langle, \rangle$  是实向量空间上的对称型或复向量空间上的埃尔米特型, 且设  $A$  是它关于一个基的矩阵.

(a) 向量  $v$  是迷向向量当且仅当它的坐标向量  $Y$  是齐次方程  $AY = 0$  的解.

(b) 这个型是非退化的当且仅当矩阵  $A$  是可逆的.

**证明** 通过基, 这个型对应于型  $X^*AY$ , 所以, 我们可用这个型讨论. 如果  $Y$  是一个向量使得  $AY = 0$ , 则对所有  $X$ ,  $X^*AY = 0$ , 这意味着  $Y$  与每个向量正交, 亦即, 它是迷向向量. 反过来, 如果  $AY \neq 0$ , 则  $AY$  有非零坐标. 矩阵积  $e_i^*AY$  为  $AY$  的第  $i$  个坐标. 于是, 这些乘积之一不为零, 所以,  $Y$  不是迷向向量. 这就证明了(a). 因为  $A$  是可逆的当且仅当方程  $AY = 0$  有非平凡解, 故得(b). ■

**【8.4.5】定理** 令  $\langle, \rangle$  是实向量空间  $V$  上的对称型或复向量空间  $V$  上的埃尔米特型, 且设  $W$  是  $V$  的子空间.

(a) 这个型在  $W$  上是非退化的当且仅当  $V$  是直和  $W \oplus W^\perp$ .

(b) 如果这个型在  $V$  上和  $W$  上是非退化的, 则它在  $W^\perp$  上是非退化的.

当向量空间  $V$  是直和  $W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$ , 且对  $i \neq j$ ,  $W_i$  与  $W_j$  正交时, 称  $V$  是子空间的正交和. 定理断言如果这个型在  $W$  上是非退化的, 则  $V$  是  $W$  与  $W^\perp$  的正交和.

**定理 8.4.5 的证明** (a) 直和条件为  $W \cap W^\perp = \{0\}$  与  $V = W + W^\perp$  (命题 3.6.6(c)). 第一个条件简单重述为型在子空间上是非退化的假设: 如果  $V$  是直和, 则型是非退化的. 我们必须证明如果型在  $W$  上是非退化的, 则  $V$  中的每个向量  $v$  可表示为和  $v = w + u$ , 其中  $w \in W$  与  $u \in W^\perp$ .

扩展  $W$  的基  $(w_1, \dots, w_k)$  为  $V$  的基  $B = (w_1, \dots, w_k; v_1, \dots, v_{n-k})$ , 把型关于这个基的矩阵写为分块形式

【8.4.6】

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

其中  $A$  是左上  $k \times k$  子矩阵.

块  $A$  的元素是  $\langle w_i, w_j \rangle$ , 其中  $i, j=1, \dots, k$ , 所以,  $A$  是型限制到  $W$  的矩阵. 因为在  $W$  上是非退化的, 故  $A$  是可逆的. 块  $B$  的元素是  $\langle w_i, v_j \rangle$ , 其中  $i=1, \dots, k$  与  $j=1, \dots, n-k$ . 如果选取向量  $v_1, \dots, v_{n-k}$  使得  $B$  变为 0, 则这些向量与  $W$  的基正交, 于是, 它们属于正交空间  $W^\perp$ . 这样, 因为  $B$  是  $V$  的基, 故得  $V=W+W^\perp$ , 这就是我们想要证明的.

要得到  $B=0$ , 我们用分块矩阵变换基

【8.4.7】

$$P = \begin{bmatrix} I & Q \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

其中块  $Q$  待定. 新基  $B'=BP$  具有形式  $(w_1, \dots, w_k; v'_1, \dots, v'_{n-k})$ .  $W$  的基没有变. 型关于新基的矩阵为

$$\text{【8.4.8】} \quad M' = P \cdot M P = \begin{bmatrix} I & 0 \\ Q & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & Q \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & AQ+B \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

不需要计算其他元素. 当置  $Q=-A^{-1}B$  时,  $M'$  的右上角变为所希望的 0.

237

(b) 假设型在  $V$  上和  $W$  上是非退化的. (a) 表明  $V=W \oplus W^\perp$ . 如果把  $W$  与  $W^\perp$  的基附加在一起选取  $V$  的基, 则型在  $V$  上的矩阵是对角分块矩阵, 其中块为型限制在  $W$  与  $W^\perp$  上的矩阵. 型在  $V$  上的矩阵是可逆的(命题 8.4.4), 所以块是可逆的. 于是, 型在  $W^\perp$  上是非退化的. ■

【8.4.9】引理 如果对称型或埃尔米特型不恒等于 0, 则在  $V$  里存在向量  $v$  使得  $\langle v, v \rangle \neq 0$ .

证明 如果型不恒等于 0, 则存在向量  $x$  与  $y$  使得  $\langle x, y \rangle \neq 0$ . 如果型是埃尔米特的, 那么用  $c y$  替换  $y$  使得  $\langle x, y \rangle$  是实的且仍不为 0, 其中  $c$  是非零复数. 这样,  $\langle y, x \rangle = \langle x, y \rangle$ . 展开:

$$\langle x+y, x+y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle$$

因为项  $2\langle x, y \rangle$  不为 0, 故方程的三个其他项中至少有一个不为 0. ■

【8.4.10】定理 令  $\langle, \rangle$  是实向量空间  $V$  上的对称型或复向量空间  $V$  上的埃尔米特型, 则  $V$  存在一个正交基.

证明 情形 1: 型恒等于 0. 这样, 每个基都是正交的.

情形 2: 型不恒等于 0. 对维数进行归纳证明, 可假设型在  $V$  的任意真子空间上有正交基. 应用引理 8.4.9, 选取使得  $\langle v_1, v_1 \rangle \neq 0$  的向量  $v_1$  作为基的第一个向量. 令  $W$  是  $(v_1)$  的张成. 型限制在  $W$  上的矩阵是  $1 \times 1$  矩阵, 其元素为  $\langle v_1, v_1 \rangle$ . 它是可逆矩阵, 于是, 型在  $W$  上是非退化的. 由定理 8.4.5,  $V=W \oplus W^\perp$ . 由归纳假设,  $W^\perp$  有正交基, 比如说  $(v_2, \dots, v_n)$ . 这样,  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  是  $V$  的正交基. ■

## 正交投影

假设给定型在子空间  $W$  上是非退化的. 定理 8.4.5 告诉我们  $V$  是直和  $W \oplus W^\perp$ .  $V$  中的每个向量  $v$  可唯一地写成形式  $v = w + u$ , 其中  $w \in W$  与  $u \in W^\perp$ . 从  $V$  到  $W$  的正交投影是由  $\pi(v) = w$  定义的映射  $\pi: V \rightarrow W$ . 分解  $v = w + u$  与向量的和以及标量乘法是相容的. 于是,  $\pi$  是线性变换.

正交投影是从  $V$  到  $W$  的唯一线性变换, 使得  $\pi(w) = w$  如果  $w \in W$ ;  $\pi(u) = 0$  如果  $u \in W^\perp$ .

**注意** 如果型在子空间  $W$  上是退化的, 则到  $W$  的正交投影不存在. 理由是  $W \cap W^\perp$  含有非零元素  $x$ , 而且不可能既有  $\pi(x) = x$  又有  $\pi(x) = 0$ .

238

下一个定理提供了正交投影的一个非常重要的公式.

**【8.4.11】定理(投影公式)** 令  $\langle, \rangle$  是实向量空间  $V$  上的对称型或复向量空间  $V$  上的埃尔米特型, 设  $W$  是  $V$  的子空间, 型在其上是非退化的. 如果  $(w_1, \dots, w_k)$  是  $W$  的正交基, 则正交投影  $\pi: V \rightarrow W$  由公式  $\pi(v) = w_1 c_1 + \dots + w_k c_k$  给出, 其中

$$c_i = \frac{\langle w_i, v \rangle}{\langle w_i, w_i \rangle}$$

**证明** 因为型在  $W$  上是退化的, 且它关于正交基的矩阵是对角的, 故  $\langle w_i, w_i \rangle \neq 0$ . 因此, 公式是有意义的. 已知向量  $v$ , 令  $w$  表示向量  $w_1 c_1 + \dots + w_k c_k$ , 其中  $c_i$  同上. 这是  $W$  的元素, 所以, 如果我们证明  $v - w = u$  属于  $W^\perp$ , 则得  $\pi(v) = w$ , 如同定理所断言的. 要证  $u \in W^\perp$ , 我们证明对  $i = 1, \dots, k$ , 有  $\langle w_i, u \rangle = 0$ . 因为如果  $i \neq j$ , 则  $\langle w_i, w_j \rangle = 0$ , 故

$$\begin{aligned} \langle w_i, u \rangle &= \langle w_i, v \rangle - \langle w_i, w \rangle = \langle w_i, v \rangle - (\langle w_i, w_1 \rangle c_1 + \dots + \langle w_i, w_k \rangle c_k) \\ &= \langle w_i, v \rangle - \langle w_i, w_i \rangle c_i = 0 \end{aligned}$$

**注意** 这个投影公式不成立, 除非基是正交的.

**【8.4.12】例** 令  $V$  是列向量空间  $\mathbf{R}^3$ , 令  $\langle v, w \rangle$  表示点积型. 令  $W$  是由向量  $w_1$  张成的子空间,  $w_1$  的坐标向量为  $(1, 1, 1)^t$ . 令  $(x_1, x_2, x_3)^t$  是向量  $v$  的坐标向量. 则  $\langle w_1, v \rangle = x_1 + x_2 + x_3$ . 投影公式为  $\pi(v) = w_1 c$ , 其中  $c = (x_1 + x_2 + x_3)/3$ .

如果型在整个空间  $V$  上是非退化的, 则从  $V$  到  $V$  的正交投影将是恒等映射. 投影公式在这种情形中也值得关注, 因为它可用于计算向量  $v$  关于正交基的坐标.

**【8.4.13】推论** 令  $\langle, \rangle$  是实向量空间  $V$  上的对称型或复向量空间  $V$  上的埃尔米特型, 设  $(v_1, \dots, v_n)$  是  $V$  的正交基, 且  $v$  是任意向量. 则  $v = v_1 c_1 + \dots + v_n c_n$ , 其中

$$c_i = \frac{\langle v_i, v \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle}$$

**【8.4.14】例** 令  $B = (v_1, v_2, v_3)$  是  $\mathbf{R}^3$  的正交基, 其坐标向量为

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

令  $v$  是一个向量, 其坐标向量为  $(x_1, x_2, x_3)'$ . 这样,  $v = v_1 c_1 + v_2 c_2 + v_3 c_3$  且

$$c_1 = (x_1 + x_2 + x_3)/3, \quad c_2 = (x_1 - x_2)/2, \quad c_3 = (x_1 + x_2 - 2x_3)/6$$

接下来考虑构成正交基的向量的缩放.

239

**【8.4.15】推论** 令  $\langle, \rangle$  是实向量空间  $V$  上的对称型或复向量空间  $V$  上的埃尔米特型.

(a) 存在  $V$  的正交基  $B = (v_1, \dots, v_n)$ , 具有性质: 对每个  $i$ ,  $\langle v_i, v_i \rangle = 1, -1$  或  $0$ .

(b) 矩阵形式: 如果  $A$  是一个实对称  $n \times n$  矩阵, 则存在可逆实矩阵  $P$  使得  $P'AP$  是对角矩阵, 其每个对角元为  $1, -1$  或  $0$ . 如果  $A$  是一个复埃尔米特  $n \times n$  矩阵, 则存在可逆复矩阵  $P$  使得  $P^*AP$  是对角矩阵, 其每个对角元为  $1, -1$  或  $0$ .

**证明** (a) 令  $(v_1, \dots, v_n)$  是正交基. 如果  $v$  是一个向量, 则对任意非零实数  $c$ , 有  $\langle cv, cv \rangle = c^2 \langle v, v \rangle$ , 且  $c^2$  可以是任意正实数. 所以, 如果用一个标量乘  $v_i$ , 则可用任意正实数调整实数  $\langle v_i, v_i \rangle$ . 这就证明了(a). 应用(a)到型  $X^*AY$  就得到(b). ■

如果适当排列正交基, 则型的矩阵有块分解

$$\text{【8.4.16】} \quad A = \begin{bmatrix} I_p & & \\ & -I_m & \\ & & 0_z \end{bmatrix}$$

其中  $p, m$  和  $z$  是对角线上  $1, -1$  和  $0$  的个数, 且  $p+m+z=n$ . 型是非退化的当且仅当  $z=0$ .

如果型是非退化的, 则整数对  $(p, m)$  称为型的符号差. 西尔维斯特法则(见练习 4.21)断言符号差不依赖于正交基的选取.

记号  $I_{p,m}$  常用来表示对角矩阵

$$\text{【8.4.17】} \quad I_{p,m} = \begin{bmatrix} I_p & \\ & -I_m \end{bmatrix}$$

用这个记号, 表示洛伦兹型的矩阵(8.2.2)是  $I_{3,1}$ .

这个型是正定的当且仅当  $m$  与  $z$  都是  $0$ . 这样, 正规化基有如下性质: 对每个  $i$ ,  $\langle v_i, v_i \rangle = 1$ , 对  $i \neq j$ ,  $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ . 这叫做标准正交基, 与前面引进  $\mathbf{R}^n$  的基的术语一致(5.1.8). 标准正交基  $B$  涉及  $\mathbf{R}^n$  上点积的型, 或涉及  $\mathbf{C}^n$  上标准埃尔米特型. 亦即, 如果  $v = BZ$ ,  $w = BY$ , 则  $\langle v, w \rangle = X^*Y$ . 标准正交基存在当且仅当型是正定的.

**注意** 如果  $B$  是  $V$  的子空间  $W$  的标准正交基, 则从  $V$  到  $W$  的投影由公式  $\pi(v) = w_1 c_1 + \dots + w_k c_k$  给出, 其中  $c_i = \langle w_i, v \rangle$ . 投影公式比较简单, 因为(8.4.11)里的分母  $\langle w_i, w_i \rangle$  等于  $1$ . 然而正规化向量需要求平方根, 正因为如此, 有时宁愿用正交基而不用正规化.

定理 8.2.5(iii)  $\Rightarrow$  (i) 的证明由这个讨论得到:

240

**【8.4.18】推论** 如果实矩阵  $A$  是对称与正定的, 则型  $X^*AY$  关于  $\mathbf{R}^n$  的某个基表示点积.

当已知正定对称型或埃尔米特型时, 投影公式提供了归纳法, 称为格拉姆-施密特过程, 用以求标准正交基, 这个方法从任意一个基  $(v_1, \dots, v_n)$  开始. 过程如下: 令  $V_k$  表示由基向量  $(v_1, \dots, v_k)$  张成的空间. 假设对某个  $k \leq n$  已经求得  $V_{k-1}$  的标准正交基  $(w_1,$

$w_2, \dots, w_{k-1}$ ). 令  $\pi$  表示从  $V_k$  到  $V_{k-1}$  的正交投影. 则  $\pi(v_k) = w_1 c_1 + \dots + w_{k-1} c_{k-1}$ , 其中  $c_i = \langle w_i, v_k \rangle$  和  $w_k = v_k - \pi(v_k)$  与  $V_{k-1}$  正交. 当正规化  $\langle w_k, w_k \rangle$  到 1 时, 集合  $(w_1, \dots, w_k)$  是  $V_k$  的标准正交基.

本节最后一个话题是将对称型用关于任意基的矩阵判别为正定型的判别准则. 设  $A = (a_{ij})$  是对称型关于  $V$  的基  $B = (v_1, \dots, v_n)$  的矩阵, 且设  $A_k$  表示由矩阵元素  $a_{ij}$  构成的  $k \times k$  子式, 其中  $i, j \leq k$ :

$$A_1 = [a_{11}], \quad A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \dots, A_n = A$$

**【8.4.19】定理** 型与矩阵是正定的当且仅当  $\det A_k > 0$ , 其中  $k=1, \dots, n$ .

把证明留作练习.

例如, 矩阵  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  是正定的, 因为  $\det[2]$  与  $\det A$  都是正的.

## 第五节 欧几里得空间与埃尔米特空间

当在  $\mathbf{R}^n$  里讨论时, 我们也许希望变换基. 但如果我们的问题涉及点积——若涉及向量的长度与正交性——对任意新基的变换也许是不合理的, 因为它将不保持长度与正交性. 最好是限制到标准正交基, 以便保持点积. 欧几里得空间的概念提供了这样做的框架. 一个实向量空间与一个正定对称型一起称为欧几里得空间, 而一个复向量空间与一个正定埃尔米特型一起称为埃尔米特空间.

具有点积的空间  $\mathbf{R}^n$  是标准欧几里得空间. 任意欧几里得空间的标准正交基把空间归回到标准欧几里得空间. 类似地, 标准埃尔米特型  $\langle X, Y \rangle = X^* Y$  使  $\mathbf{C}^n$  成为标准埃尔米特空间, 且任意埃尔米特空间的标准正交基把空间归回到标准埃尔米特空间. 在任意欧几里得空间或埃尔米特空间与标准欧几里得空间或标准埃尔米特空间之间的重要区别是没有涉及标准正交基. 无论如何, 当在这样的空间里讨论时, 我们总是使用标准正交基, 尽管还未选取它. 标准正交基的变换将视情况由正交矩阵或酉矩阵给出.

241

**【8.5.1】推论** 令  $V$  是欧几里得空间或埃尔米特空间, 带有正定型  $\langle, \rangle$ , 且设  $W$  是  $V$  的子空间. 则型在  $W$  上是非退化的, 从而  $V = W \oplus W^\perp$ .

**证明** 如果  $w$  是  $W$  的非零向量, 则  $\langle w, w \rangle$  是正实数. 它不是 0, 所以,  $w$  不是  $V$  或  $W$  里的非零迷向向量. 所以, 迷向空间是 0. ■

关于对称型所了解到的知识允许我们在欧几里得空间  $V$  里解释向量的长度及两个向量  $v$  和  $w$  内的夹角. 把这些向量是相关的这种特殊情形放在一边, 假设它们张成 2 维子空间  $W$ . 当我们限制型时,  $W$  成为 2 维欧几里得空间. 所以,  $W$  有标准正交基  $(w_1, w_2)$ , 且通过这个基, 向量  $v$  和  $w$  在  $\mathbf{R}^2$  里有坐标向量. 用小写字母  $x$  和  $y$  记这些 2 维坐标向量. 它们不是我们在整个空间  $V$  里使用标准正交基时得到的坐标向量, 但我们有  $\langle v, w \rangle = x^* y$ , 而这允许我们用  $\mathbf{R}^2$  里的点积解释型的几何性质.

向量  $v$  的长度  $|v|$  定义为  $|v|^2 = \langle v, v \rangle$ . 如果  $x$  是  $v$  在  $\mathbf{R}^2$  里的坐标向量, 则  $|v|^2 = x^t x$ .  $\mathbf{R}^2$  里的余弦定理  $(x \cdot y) = |x| |y| \cos \theta$  变成了

$$\text{【8.5.2】} \quad \langle v, w \rangle = |v| |w| \cos \theta$$

其中  $\theta$  是  $x$  和  $y$  间的夹角. 由于这个公式用型表示了  $\cos \theta$ , 所以它定义了向量  $v$  和  $w$  间的无向角  $\theta$ . 因为  $\cos \theta = \cos(-\theta)$  不能被消去, 所以出现了角度符号的混乱. 当在  $\mathbf{R}^3$  里从前往后看时, 角度用符号区分.

## 第六节 谱 定 理

本节我们分析埃尔米特空间上的某个线性算子.

令  $T: V \rightarrow V$  是埃尔米特空间  $V$  上的线性算子, 设  $A$  是  $T$  关于标准正交基  $B$  的矩阵. 伴随算子  $T^*: V \rightarrow V$  是这样—个算子, 其关于同一个基的矩阵是伴随矩阵  $A^*$ .

如果变换到新的标准正交基  $B'$ , 则基变换矩阵  $P$  是酉矩阵, 且  $T$  的新矩阵有形式  $A' = P^* A P = P^{-1} A P$ . 它的伴随是  $A'^* = P^* A^* P$ . 这是  $T^*$  关于新基的矩阵. 于是,  $T^*$  的定义有意义: 它与标准正交基无关.

伴随矩阵的计算规则(8.3.5)可平移到伴随算子:

$$\text{【8.6.1】} \quad (T+U)^* = T^* + U^*, \quad (TU)^* = U^* T^*, \quad T^{**} = T$$

正规矩阵是一个与它的伴随交换的复矩阵  $A$ , 满足  $A^* A = A A^*$ . 它本身不是特别重要的矩阵类, 但却是叙述我们本节证明的谱定理的自然类. 它包含两个重要类: 埃尔米特矩阵 ( $A^* = A$ ) 和酉矩阵 ( $A^* = A^{-1}$ ).

**【8.6.2】引理** 令  $A$  是  $n \times n$  复矩阵, 设  $P$  是  $n \times n$  酉矩阵. 如果  $A$  是正规的、埃尔米特的或酉的, 则  $P^* A P$  也是正规的、埃尔米特的或酉的.

埃尔米特空间  $V$  上的线性算子  $T$  称做正规的、埃尔米特的或酉的, 如果它关于一个标准正交基的矩阵有同样的性质. 所以,  $T$  是正规的, 如果  $T^* T = T T^*$ ;  $T$  是埃尔米特的, 如果  $T^* = T$ ;  $T$  是酉的, 如果  $T^* T = I$ . 埃尔米特算子有时叫做自伴随算子, 但我们不用这个术语.

242

下一个命题用型解释了这些条件.

**【8.6.3】命题** 令  $T$  是埃尔米特空间  $V$  上的线性算子, 设  $T^*$  是它的伴随算子.

(a) 对  $V$  中所有  $v$  和  $w$ , 有  $\langle T v, w \rangle = \langle v, T^* w \rangle$ ,  $\langle v, T w \rangle = \langle T^* v, w \rangle$ .

(b)  $T$  是正规的当且仅当对  $V$  中所有  $v$  和  $w$ ,  $\langle T v, T w \rangle = \langle T^* v, T^* w \rangle$ .

(c)  $T$  是埃尔米特的当且仅当对  $V$  中所有  $v$  和  $w$ ,  $\langle T v, w \rangle = \langle v, T w \rangle$ .

(d)  $T$  是酉的当且仅当对  $V$  中所有  $v$  和  $w$ ,  $\langle T v, w \rangle = \langle v, w \rangle$ .

**证明**

(a) 令  $A$  是算子  $T$  关于标准正交基  $B$  的矩阵.  $\langle T v, w \rangle = (A X)^* Y = X^* A^* Y$ ,  $\langle v, T^* w \rangle = X^* A^* Y$ , 其中, 与通常一样  $v = B X$ ,  $w = B Y$ . 所以,  $\langle T v, w \rangle = \langle v, T^* w \rangle$ .

(a) 的其他公式的证明是类似的.

(b) 在(a)的第一个方程里用  $T^*v$  替换  $v$ :  $\langle TT^*v, w \rangle = \langle T^*v, T^*w \rangle$ . 类似地, 在(a)的第二个方程里用  $Tv$  替换  $v$ :  $\langle Tv, Tw \rangle = \langle T^*Tv, w \rangle$ . 于是, 如果  $T$  是正规的, 则  $\langle Tv, Tw \rangle = \langle T^*v, T^*w \rangle$ . 应用命题 8.4.3 到两个向量  $T^*Tv$  与  $TT^*v$  可得(b)的反向结论. (c)与(d)的证明是类似的. ■

令  $T$  是埃尔米特空间  $V$  上的线性算子. 同以前一样,  $V$  的子空间  $W$  是  $T$ -不变的, 如果  $TW \subset W$ . 线性算子  $T$  限制为  $T$ -不变子空间上的线性算子, 且如果  $T$  是正规的、埃尔米特的或酉的, 则限制线性算子将有同样的性质. 这由命题 8.6.3 得到.

**【8.6.4】命题** 令  $T$  是埃尔米特空间  $V$  上的线性算子, 且令  $W$  是  $V$  的子空间. 如果  $W$  是  $T$ -不变的, 则正交空间  $W^\perp$  是  $T$ -不变的. 如果  $W$  是  $T^*$ -不变的, 则  $W^\perp$  是  $T^*$ -不变的.

**证明** 假设  $W$  是  $T$ -不变的. 要证  $W^\perp$  是  $T^*$ -不变的, 我们必须证明如果  $u \in W^\perp$ , 则  $T^*u \in W^\perp$ . 根据  $W^\perp$  的定义, 这意味着对所有  $w \in W$ ,  $\langle w, T^*u \rangle = 0$ . 由命题 8.6.3,  $\langle w, T^*u \rangle = \langle Tw, u \rangle$ . 因为  $W$  是  $T$ -不变的, 故  $Tw \in W$ . 这样, 因为  $u \in W^\perp$ , 故  $\langle Tw, u \rangle = 0$ . 于是,  $\langle w, T^*u \rangle = 0$ , 正如所要求的. 因为  $T^{**} = T$ , 故互换  $T$  与  $T^*$  的作用可得到第二个结论. ■

下一个定理是应用已知的  $V$  上的型是正定的主要地方.

**【8.6.5】定理** 令  $T$  是埃尔米特空间  $V$  上的正规算子, 且令  $v$  是  $T$  的伴随于特征值  $\lambda$  的特征向量, 则  $v$  也是  $T^*$  的特征向量, 且伴随于特征值  $\bar{\lambda}$ .

**证明** 情形 1:  $\lambda = 0$ . 这样,  $Tv = 0$ , 我们必须证明  $T^*v = 0$ . 因为型是正定的, 故只要证明  $\langle T^*v, T^*v \rangle = 0$  就够了. 由命题 8.6.3,  $\langle T^*v, T^*v \rangle = \langle Tv, Tv \rangle = \langle 0, 0 \rangle = 0$ .

情形 2:  $\lambda$  是任意的. 令  $S$  表示线性算子  $T - \lambda I$ . 这样,  $v$  是  $S$  的伴随于特征值 0 的特征向量:  $Sv = 0$ . 而且,  $S^* = T^* - \bar{\lambda}I$ . 可以验证  $S$  是正规算子. 由情形 1,  $v$  是  $S^*$  的伴随于特征值 0 的特征向量:  $S^*v = T^*v - \bar{\lambda}v = 0$ . 这表明  $v$  是  $T^*$  的伴随于特征值  $\bar{\lambda}$  的特征向量. ■

243

**【8.6.6】定理(正规算子的谱定理)**

(a) 令  $T$  是埃尔米特空间  $V$  上的正规算子, 则  $V$  存在由  $T$  的特征向量组成的标准正交基.

(b) 矩阵形式: 令  $A$  是正规矩阵, 则存在酉矩阵  $P$  使得  $P^*AP$  是对角的.

**证明**

(a) 选取  $T$  的特征向量  $v_1$ , 正规化它的长度为 1. 由定理 8.6.5 知  $v_1$  也是  $T^*$  的特征向量. 所以, 由  $v_1$  张成的 1 维子空间  $W$  是  $T^*$ -不变的. 由命题 8.6.4,  $W^\perp$  是  $T$ -不变的. 我们还知道  $V = W \oplus W^\perp$ .  $T$  在任意不变子空间(包括  $W^\perp$ )上的限制是正规算子. 对维数作归纳, 可假设  $W^\perp$  有由特征向量组成的标准正交基, 比如说  $(v_2, \dots, v_n)$ . 把  $v_1$  添加到这个集合就得到由  $T$  的特征向量组成的  $V$  的标准正交基.

(b) 这由(a)用通常方法证明. 把  $A$  看成  $C^n$  上  $A$  的乘法的正规算子的矩阵. 由(a), 存在由特征向量组成的标准正交基  $B$ . 从  $E$  到  $B$  的基变换矩阵  $P$  是酉矩阵, 且算子关于新基的矩阵为  $P^*AP$ , 是对角的. ■

下个推论是应用谱定理到两个最重要的正规矩阵得到的.

**【8.6.7】推论(埃尔米特算子的谱定理)**

- (a) 令  $T$  是埃尔米特空间  $V$  上的埃尔米特算子.
- (i)  $V$  存在由  $T$  的特征向量组成的标准正交基.
- (ii)  $T$  的特征值是实数.
- (b) 矩阵形式: 令  $A$  是埃尔米特矩阵.
- (i) 存在酉矩阵  $P$  使得  $P^*AP$  为实对角矩阵.
- (ii)  $A$  的特征值是实数.

**证明** 以前证明过(b)(ii)(定理 8.3.11), 而(a)(i)由正规算子的谱定理得到. 其他断言是变形. ■

**【8.6.8】推论(酉矩阵的谱定理)**

- (a) 令  $A$  是酉矩阵, 则存在酉矩阵  $P$  使得  $P^*AP$  是对角的.
- (b) 酉矩阵群  $U_n$  里每个共轭类含有对角阵.

要对角化埃尔米特矩阵  $M$ , 可通过确定它的特征值进行. 如果特征值是不同的, 则对应的特征向量是正交的, 可正规化它们的长度到 1. 这由谱定理可得到. 例如,  $v'_1 =$

244

$\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$  与  $v'_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$  是埃尔米特矩阵  $M = \begin{bmatrix} 2 & i \\ -i & 2 \end{bmatrix}$  的特征向量, 分别伴随于特征值 3 和 1. 用

因子  $1/\sqrt{2}$  正规化它们的长度为 1, 得到酉矩阵  $P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix}$ . 这样,  $P^*MP = \begin{bmatrix} 3 & \\ & 1 \end{bmatrix}$ .

然而, 谱定理断言埃尔米特矩阵能够对角化, 即使它的特征值不是不同的. 例如, 其特征多项式有重根  $\lambda$  的唯一  $2 \times 2$  埃尔米特矩阵是  $\lambda I$ .

我们对埃尔米特矩阵所证明的结果对于实对称矩阵有着类似的结果. 欧几里得空间  $V$  上的对称算子  $T$  是其关于标准正交基的矩阵为对称的线性算子. 类似地, 欧几里得空间  $V$  上的正交算子  $T$  是其关于标准正交基的矩阵为正交的线性算子.

**【8.6.9】命题** 令  $T$  是欧几里得空间  $V$  上的线性算子.

- (a)  $T$  是对称的当且仅当对  $V$  中所有  $v$  与  $w$ ,  $\langle Tv, w \rangle = \langle v, Tw \rangle$ .
- (b)  $T$  是正交的当且仅当对  $V$  中所有  $v$  与  $w$ ,  $\langle Tv, Tw \rangle = \langle v, w \rangle$ .

**【8.6.10】定理(对称算子的谱定理)**

- (a) 令  $T$  是欧几里得空间  $V$  上的对称算子.
- (i)  $V$  存在由  $T$  的特征向量组成的标准正交基.
- (ii)  $T$  的特征值是实数.
- (b) 矩阵形式: 令  $A$  是实对称矩阵.
- (i) 存在正交矩阵  $P$  使得  $P^*AP$  为实对角矩阵.
- (ii)  $A$  的特征值是实数.

**证明** 以前我们证明过(b)(ii)(推论 8.3.12), 从而得证(a)(ii). 知道这些, (a)(i)的



证明仿照定理 8.6.6 可得. ■

谱定理是强大的工具. 遇到埃尔米特算子或埃尔米特矩阵时, 应用该定理会是自动反应.

## 第七节 圆锥曲线与二次曲面

椭圆、双曲线与抛物线称为圆锥曲线. 它们是  $\mathbf{R}^2$  中由二次方程  $f=0$  定义的轨迹, 其中

$$\text{【8.7.1】} \quad f(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + b_1x_1 + b_2x_2 + c$$

且系数  $a_{ij}$ ,  $b_i$  与  $c$  是实数. (随后会解释  $x_1x_2$  的系数写成  $2a_{12}$  的理由.) 如果二次方程的轨迹  $f=0$  不是一条圆锥曲线, 就称它是退化圆锥曲线. 退化圆锥曲线按照其方程不同, 可以是一对直线、单独一条直线、一个点或空集. 为强调一个特殊轨迹是非退化的, 我们有时称它为非退化圆锥曲线.

245

我们计划在平面的等距群的作用下描述圆锥曲线的轨道. 两个非退化圆锥曲线在同一轨道当且仅当它们是全等的几何图形.

多项式  $f(x_1, x_2)$  的二次部分称为二次型:

$$\text{【8.7.2】} \quad q(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

任意多个变量的二次型是多项式, 它的每一项的变量次数为 2. 以矩阵形式表示二次型  $q$  是方便的. 为此, 引进对称矩阵

$$\text{【8.7.3】} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$$

这样, 如果  $X = (x_1, x_2)'$ , 则二次型可写为  $q(x_1, x_2) = X'AX$ . 为避免在这个矩阵里出现一些  $\frac{1}{2}$  系数, 把系数 2 放进公式 (8.7.1) 与 (8.7.2) 里. 如果还引入  $1 \times 2$  矩阵  $B = [b_1, b_2]$ , 则方程  $f=0$  可用矩阵记号紧缩地写为

$$\text{【8.7.4】} \quad X'AX + BX + c = 0$$

**【8.7.5】定理** 每个非退化圆锥曲线全等于下列轨迹之一, 其中系数  $a_{11}$  与  $a_{22}$  是正的:

$$\text{椭圆: } a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 - 1 = 0$$

$$\text{双曲线: } a_{11}x_1^2 - a_{22}x_2^2 - 1 = 0$$

$$\text{抛物线: } a_{11}x_1^2 - x_2 = 0$$

系数  $a_{11}$  与  $a_{22}$  由圆锥曲线的同余类确定, 除非在椭圆方程里它们可互换.

**证明** 用两步简化方程 (8.7.4), 首先应用正交变换对角化矩阵  $A$ , 其次, 当可能时应用平移消去一次项和常数项.

对称算子的谱定理 8.6.10 断言: 存在  $2 \times 2$  正交矩阵  $P$  使得  $P'AP$  是对角的. 做变量变化  $PX' = X$ , 且代入 (8.7.4):

$$\text{【8.7.6】} \quad X'A'X' + B'X' + c = 0$$

其中  $A' = P^t A P$ ,  $B' = B P$ . 用变量的正交变换, 二次型变为对角的, 亦即,  $x'_1 x'_2$  的系数为 0. 去掉撇号, 当二次型是对角的时候,  $f$  有形式

$$f(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + b_1x_1 + b_2x_2 + c$$

246

我们用“完全平方法”消去  $b_i$ , 利用代换继续

$$\text{【8.7.7】} \quad x_i = \left( x'_i - \frac{b_i}{2a_{ii}} \right)$$

这个代换对应坐标平移. 再次去掉撇号,  $f$  变为

$$\text{【8.7.8】} \quad f(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + c = 0$$

其中常数项  $c$  变了. 需要时, 新常数项可以计算出来. 当其为 0 时, 轨迹是退化的. 假设  $c \neq 0$ , 可用一个标量乘  $f$  把  $c$  变为  $-1$ . 如果  $a_{ii}$  均为负的, 则轨迹是空的. 因此, 它是退化的. 所以, 至少有一个系数是正的, 可假设  $a_{11} > 0$ . 这样, 在定理的叙述中就剩下椭圆方程与双曲线方程.

因为消去一次项系数  $b_i$  的代换需要  $a_{ii}$  是非零的, 故抛物线出现了. 由于假设  $f$  是二次的, 故这些系数不全为 0, 可设  $a_{11} \neq 0$ . 如果  $a_{22} = 0$  但  $b_2 \neq 0$ , 我们消去  $b_1$ , 且用代换

$$\text{【8.7.9】} \quad x_2 = x'_2 - c/b_2$$

消去常数项. 用标量因子调整  $f$  并去掉退化情形就剩下抛物线方程了. ■

**【8.7.10】例** 令  $f$  是二次多项式  $x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2 + 2x_1 + 2x_2 - 1$ , 则

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = [2 \quad 2], \quad c = 1$$

$A$  的特征值为  $\pm\sqrt{2}$ . 置  $a = \sqrt{2} - 1$  与  $b = \sqrt{2} + 1$ , 向量

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ b \end{bmatrix}$$

是分别伴随于特征值  $\sqrt{2}$  与  $-\sqrt{2}$  的特征向量. 它们是正交的, 且当把它们的长度正规化为 1 时, 它们构成标准正交基  $B$  使得  $[B]^{-1}A[B]$  为对角的. 不幸的是,  $v_1$  的平方长度是  $4 - 2\sqrt{2}$ . 为正规化它的长度为 1, 必须除以  $\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$ . 手工继续进行这样的计算是很烦人的.

如果给定二次方程  $f(x_1, x_2) = 0$ , 则通过简单任意的基变换(不一定是正交的), 我们能够确定它所表示的圆锥曲线类型. 非正交变换将扭曲椭圆曲线, 但它不会把椭圆曲线变为双曲线、抛物线或退化圆锥曲线. 如果仅仅希望确定圆锥曲线类型, 那么基的任意变换都是允许的.

我们继续如同(8.7.6)里的讨论, 但用基的非正交变换:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ & 1 \end{bmatrix}, P^t A P = \begin{bmatrix} 1 & \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \\ & -2 \end{bmatrix}, B P = [2 \quad 0]$$

247

去掉撇号, 新方程变为  $x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_1 - 1 = 0$ , 完全配方后得  $x_1^2 - 2x_2^2 - 2 = 0$ , 这是一条双

曲线. 所以, 原来的轨迹也是双曲线.

顺便, 椭圆方程里的矩阵  $A$  是正定的或负定的, 而双曲线方程里的矩阵  $A$  是不定的. 上面所用的矩阵  $A$  是不定的. 我们马上就能看到刚才检查的轨迹或是双曲线还是退化圆锥曲线. ■

用来描述圆锥曲线的方法可应用于分类任意维的二次曲面. 一般二次方程有形式  $f=0$ , 其中

$$\text{【8.7.11】} \quad f(x_1, \dots, x_n) = \sum_i a_{ii} x_i^2 + \sum_{i < j} 2a_{ij} x_i x_j + \sum_i b_i x_i + c$$

令矩阵  $A$  与  $B$  定义为

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad B = [b_1 \quad \cdots \quad b_n]$$

这样,

$$\text{【8.7.12】} \quad f(x_1, \dots, x_n) = X^T A X + B X + c$$

伴随二次型为

$$\text{【8.7.13】} \quad q(x_1, \dots, x_n) = X^T A X$$

根据对称算子的谱定理, 矩阵  $A$  可通过正交变换  $P$  对角化. 当  $A$  是对角阵的时候, 只要可能, 同上面一样, 一次项与常数项就可以消去. 下面是三个变量的分类:

**【8.7.14】定理**  $\mathbf{R}^3$  中非退化二次曲面的同余类由下列轨迹代表, 其中  $a_i$  是正实数:

$$\text{椭圆面: } a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 - 1 = 0,$$

$$\text{单叶双曲面: } a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 - a_{33} x_3^2 - 1 = 0,$$

$$\text{双叶双曲面: } a_{11} x_1^2 - a_{22} x_2^2 - a_{33} x_3^2 - 1 = 0,$$

$$\text{椭圆抛物面: } a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 - x_3 = 0,$$

$$\text{双曲抛物面: } a_{11} x_1^2 - a_{22} x_2^2 - x_3 = 0$$

词按在二次多项式  $f(x_1, x_2, x_3)$  (8.7.2), 即  $f$  等于它的二次型  $q$  (8.7.13) 里的  $B$  与  $c$  为 0 的情况排序. 轨迹  $\{q=0\}$  是退化的, 但却是有意义的. 我们称之为  $Q$ . 因为  $q$  里所有项  $a_{ij} x_i x_j$  次数为 2, 故对任意实数  $\lambda$ , 有

$$\text{【8.7.15】} \quad q(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) = \lambda^2 q(x_1, x_2, x_3)$$

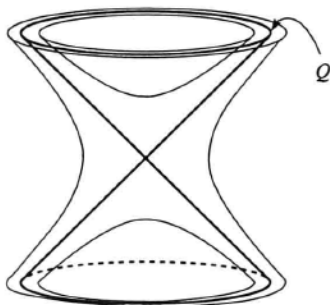
因此, 如果点  $X \neq 0$  位于  $Q$  上, 亦即  $q(X)=0$ , 则也有  $q(\lambda X)=0$ , 所以, 对每一个实数  $\lambda$ ,  $\lambda X$  也位于  $Q$  上. 因此,  $Q$  是通过原点的直线的并, 是一个双锥.

例如, 假设  $q$  是对角二次型

$$a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 - x_3^2$$

其中  $a_i$  是正的. 当用平面  $x_3=1$  截割轨迹  $Q$  时, 我们得到剩余变量的椭圆  $a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 = 1$ . 在这个情形里,  $Q$  是通过原点的直线与椭圆中点的并,

## 【8.7.16】图



圆锥附近的双曲面

注意到在双圆锥的外部,  $q(x)$  是正的, 而在内部,  $q(x)$  是负的. ( $q(x)$  的值仅当跨过  $Q$  时变号.) 所以, 对任意  $r > 0$ , 轨迹  $a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 - x_3^2 - r = 0$  位于双圆锥的外部. 它是单叶双曲面, 而轨迹  $a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 - x_3^2 + r = 0$  位于双圆锥的内部, 为双叶双曲面.

类似的推理可应用到齐次多项式  $g(x_1, \dots, x_n)$ , 即所有项都有同一次数  $d$  的任意多项式. 如果  $g$  是  $d$  次齐次多项式, 并且因此原因, 轨迹  $\{g=0\}$  也是通过原点的直线的并.

## 第八节 斜对称型

对任意标量域, 对斜对称型双线性型的描述都是一样的, 所以, 在本节我们允许向量空间是在任意域  $F$  上. 然而, 当第一次学习这个问题时, 通常最好考虑实向量空间.

249

向量空间  $V$  上的双线性型  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  是斜对称的, 如果它有下列等价性质之一:

$$\text{【8.8.1】} \quad \langle v, v \rangle = 0, v \in V$$

$$\text{【8.8.2】} \quad \langle u, v \rangle = -\langle v, u \rangle, u, v \in V$$

更确切地, 只要标量域的特征不是 2, 这些条件就是等价的. 如果  $F$  有特征 2, 则第一个条件(8.8.1)是正确的. (8.8.1) 蕴含(8.8.2)的事实由展开  $\langle u+v, u+v \rangle$ :

$$\langle u+v, u+v \rangle = \langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle$$

并利用事实  $\langle u, u \rangle = \langle v, v \rangle = \langle u+v, u+v \rangle = 0$  证明. 反过来, 如果第二个条件成立, 则置  $u=v$  得  $\langle v, v \rangle = -\langle v, v \rangle$ , 因此,  $2\langle v, v \rangle = 0$ . 于是,  $\langle v, v \rangle = 0$ , 除非  $2=0$ .

双线性型  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  是斜对称的当且仅当它的关于任意基的矩阵  $A$  是斜对称矩阵, 亦即对所有  $i$  和  $j$ ,  $a_{ij} = -a_{ji}$ ,  $a_{ii} = 0$ . 除在特征为 2 的域里外, 当置  $i=j$  时, 条件  $a_{ii} = 0$  由  $a_{ii} = -a_{ii}$  可得.

$\mathbf{R}^2$  上的行列式型  $\langle X, Y \rangle$ , 即由

$$\text{【8.8.3】} \quad \langle X, Y \rangle = \det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

定义的型为斜对称型的简单例子. 线性性质与斜对称性质是行列式的熟知性质. 行列式型(8.8.3)关于  $\mathbf{R}^2$  的标准基的矩阵是

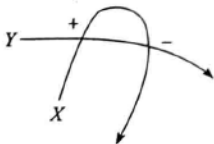
$$\text{【8.8.4】} \quad \Sigma = \begin{bmatrix} & 1 \\ -1 & \end{bmatrix}$$

在下面的定理 8.8.7 里我们将会看到每个非退化斜对称型看上去很像这个型.

当对路在曲面上的交点计数时也产生斜对称型. 为得到路变形时不变的点数, 可采用交通车流使用的规则: 一辆车从右边进入交叉路口有路权. 如果曲面上两条路  $X$  和  $Y$  在点  $p$  相交, 则定义在点  $p$  的交数如下: 如果  $X$  进入  $Y$  右边的交叉路口, 则  $\langle X, Y \rangle_p = 1$ ; 如果  $X$  进入  $Y$  左边的交叉路口, 则  $\langle X, Y \rangle_p = -1$ . 这样, 不论哪一个情形, 都有  $\langle X, Y \rangle_p = -\langle Y, X \rangle_p$ . 总交数  $\langle X, Y \rangle$  为所有交叉点的交数的和. 这样, 当  $X$  越过  $Y$  时, 交数增加, 而转回越过时再取消. 这就是拓扑学家在“同调”里定义的积.

250

【8.8.5】图



有向交数  $\langle X, Y \rangle$ .

在本章第四节里的许多定义也可用于斜对称型上. 特别地, 两个向量  $v$  与  $w$  是正交的, 如果  $\langle v, w \rangle = 0$ . 再次有  $v \perp w$  当且仅当  $w \perp v$ , 但有个差别: 当型是斜对称时, 每个向量是自正交的:  $v \perp v$ . 由于所有向量都是自正交的, 故没有正交基.

就像对于对称型为真一样, 斜对称型是非退化的当且仅当它关于任意基的矩阵是非奇异的. 下一个定理的证明与定理 8.8.5 的一样.

【8.8.6】定理 令  $\langle, \rangle$  是向量空间  $V$  上的斜对称型, 且设  $W$  是  $V$  的子空间, 使得型在其上为非退化的, 则  $V$  是正交和  $W \oplus W^\perp$ . 如果型在  $V$  与  $W$  上都是非退化的, 则它在  $W^\perp$  上也是非退化的.

【8.8.7】定理

(a) 令  $V$  是域  $F$  上正维数  $m$  的向量空间, 且设  $\langle, \rangle$  是  $V$  上的非退化斜对称型. 则  $V$  的维数是偶数, 且  $V$  有基  $B$  使得型关于这个基的矩阵  $S_0$  由对角块组成, 其中所有块等于上面(8.8.4)所示的  $2 \times 2$  矩阵  $S$ :

$$S_0 = \begin{bmatrix} \Sigma & & & \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \Sigma \end{bmatrix}$$

(b) 矩阵形式: 令  $A$  是可逆的  $m \times m$  斜对称矩阵, 则存在可逆矩阵  $P$  使得  $P^t A P = S_0$ , 如上所示.

证明 (a) 因为型是非退化的, 故可选取非零向量  $v_1$  与  $v_2$  使得  $\langle v_1, v_2 \rangle = c$  不为 0. 用标量因子调整  $v_2$  使得  $c=1$ . 由于  $\langle v_1, v_2 \rangle \neq 0$ , 但  $\langle v_1, v_1 \rangle = 0$ , 故这些向量是无关的. 令  $W$  是具有基  $(v_1, v_2)$  的 2 维子空间. 型限制在  $W$  上的矩阵是  $\Sigma$ . 由于这个矩阵是可逆的, 故型在  $W$  上是非退化的. 所以,  $V$  是直和  $W \oplus W^\perp$ , 且型在  $W^\perp$  是非退化的. 由归纳

法, 可假设存在  $W^\perp$  的基  $(v_3, \dots, v_n)$  使得型在这个子空间上的矩阵有形式 (8.8.7). 这样,  $(v_1, v_2, v_3, \dots, v_n)$  是  $V$  中所要求的基. ■

251

**【8.8.8】定理** 如果  $A$  是可逆的  $m \times m$  斜对称矩阵, 则  $m$  是偶数.

设  $\langle, \rangle$  是  $2n$  维向量空间  $V$  上的非退化斜对称型. 借助定理 8.8.7 把基重新排序为  $(v_1, v_3, \dots, v_{2n-1}; v_2, v_4, \dots, v_{2n})$ . 矩阵将变为由  $n \times n$  个块组成的块矩阵

$$\mathbf{【8.8.9】} \quad S = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}$$

## 第九节 小结

在这里我们收集了曾使用过的术语. 它们用在了实向量空间上的对称型或斜对称型, 并且也用在了复向量空间上的埃尔米特型.

**正交向量:** 两个向量  $v$  与  $w$  是正交的 (写为  $v \perp w$ ), 如果  $\langle v, w \rangle = 0$ .

**子空间的正交空间:** 对  $V$  的子空间  $W$  的正交空间  $W^\perp$  是与  $W$  的每个向量正交的向量  $v$  的集合:

$$W^\perp = \{v \in V \mid \langle v, W \rangle = 0\}$$

**迷向向量:** 一个迷向向量是与  $V$  的每个向量都正交的向量.

**迷向空间:** 给定型的迷向空间  $N$  是迷向向量的集合:

$$N = \{v \mid \langle v, V \rangle = 0\}$$

**非退化型:** 型是非退化的, 如果它的迷向空间是零空间  $\{0\}$ . 这意味着对每个非零向量  $v$ , 存在向量  $v'$  使得  $\langle v, v' \rangle \neq 0$ .

**子空间上的非退化性:** 型在子空间  $W$  上是非退化的, 如果它在  $W$  上的限制是非退化的型, 或如果  $W \cap W^\perp = \{0\}$ . 如果型在子空间  $W$  上是非退化的, 则  $V = W \oplus W^\perp$ .

**正交基:**  $V$  的基  $B = (v_1, \dots, v_n)$  是正交的, 如果向量是相互正交的, 亦即对所有指标  $i$  和  $j$  且  $i \neq j$ ,  $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ . 型关于正交基的矩阵是对角矩阵. 对任意对称型或埃尔米特型, 正交基存在, 但对斜对称型, 它是不存在的.

**标准正交基:** 基  $B = (v_1, \dots, v_n)$  是正交的, 如果对  $i \neq j$  有  $\langle v_i, v_j \rangle = 0$  且  $\langle v_i, v_i \rangle = 1$ . 对任意对称型或埃尔米特型, 标准正交基存在当且仅当型是正定的.

**正交投影:** 如果对称型或埃尔米特型在子空间  $W$  上是非退化的, 则到  $W$  的正交投影是唯一线性变换  $\pi: V \rightarrow W$  使得如果  $v \in W$ , 则  $\pi(v) = v$ , 且如果  $v \in W^\perp$ , 则  $\pi(v) = 0$ .

252

如果型在子空间  $W$  上是非退化的, 并且如果  $(w_1, \dots, w_k)$  是  $W$  的正交基, 则正交投影由公式  $\pi(v) = w_1 c_1 + \dots + w_k c_k$  给出, 其中

$$c_i = \frac{\langle w_i, v \rangle}{\langle w_i, w_i \rangle}$$

**谱定理:**

- 如果  $A$  是正规的, 则存在酉矩阵  $P$  使得  $P^* A P$  是对角的.

- 如果  $A$  是埃尔米特的, 则存在酉矩阵  $P$  使得  $P^*AP$  是实对角矩阵.
- 在酉群  $U_n$  中, 每个矩阵都与对角矩阵共轭.
- 如果  $A$  是实对称矩阵, 则存在正交矩阵  $P$  使得  $P^tAP$  是对角的.

下表比较了实向量空间与复向量空间所用到的各种各样的概念.

	实向量空间	复向量空间
型	对称型: $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$	埃尔米特型: $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$
矩阵	对称阵: $A^t = A$ 正交阵: $A^tA = I$	埃尔米特阵: $A^* = A$ 酉矩阵: $A^tA = I$ 正规矩阵: $A^*A = AA^*$
算子	对称算子: $\langle Tv, w \rangle = \langle v, Tw \rangle$ 正交算子: $\langle v, w \rangle = \langle Tv, Tw \rangle$	埃尔米特算子: $\langle Tv, w \rangle = \langle v, Tw \rangle$ 酉算子: $\langle v, w \rangle = \langle Tv, Tw \rangle$ 正规算子: $\langle Tv, Tw \rangle = \langle T^*v, T^*w \rangle$ 任意算子: $\langle v, Tw \rangle = \langle T^*v, w \rangle$

近世代数促进了几何的发展, 更重要的是促进了自身的发展.

253

—Oscar Zariski

## 练 习

### 第一节 双线性型

- 1.1 证明实向量空间  $V$  上的双线性型  $\langle, \rangle$  是对称型与斜对称型的和.

### 第二节 对称型

- 2.1 证明正定的对称实矩阵的最大元素在对角线上.  
2.2 设  $A$  与  $A'$  为由  $A' = P^tAP$  联系起来的对称矩阵, 其中  $P$  是可逆的.  $A$  的秩与  $A'$  的秩相等吗?

### 第三节 埃尔米特型

- 3.1 对所有埃尔米特矩阵  $X$ , 复  $n \times n$  矩阵  $A$  使得  $X^*AX$  为实矩阵吗?  
3.2 令  $\langle, \rangle$  是复向量空间  $V$  上的正定埃尔米特型, 且设  $\{, \}$  与  $[, ]$  为它的实部与虚部, 实值型定义如下

$$\langle v, w \rangle = \{v, w\} + [v, w]i$$

证明: 当把标量限制到  $\mathbf{R}$  使  $V$  构成实向量空间时,  $\{, \}$  是正定对称型, 而  $[, ]$  是斜对称型.

- 3.3  $n \times n$  埃尔米特矩阵的集合构成实向量空间. 求这个空间的一个基.  
3.4 证明: 如果  $A$  是可逆矩阵, 则  $A^*A$  是埃尔米特与正定的.  
3.5 令  $A$  与  $B$  是正定埃尔米特矩阵. 确定下列矩阵中哪个是正定埃尔米特矩阵:

$$A^2, A^{-1}, AB, A+B$$

- 3.6 用特征多项式证明  $2 \times 2$  埃尔米特矩阵  $A$  的特征值是实的.

### 第四节 正交性

- 4.1 其列为正交的矩阵的逆是什么?

- 4.2 令  $\langle, \rangle$  是实向量空间  $V$  上的双线性型, 且设  $v$  是向量使得  $\langle v, v \rangle \neq 0$ . 到与  $v$  正交的空间  $W = v^\perp$  的正交投影公式是什么?
- 4.3 令  $A$  是实  $m \times n$  矩阵. 证明  $B = A'A$  是半正定的, 亦即, 对所有  $X$ ,  $X'BX \geq 0$ , 且  $A$  与  $B$  有相同的秩.
- 4.4 当型是  $\langle X, Y \rangle = x_1y_1 - x_2y_2$  时, 在  $\mathbf{R}^2$  中指出一些正交向量的大概位置.
- 4.5 在  $\mathbf{R}^3$  上求型的正交基, 型的矩阵如下:

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (b) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

4.6 扩展向量  $X_1 = \frac{1}{2}(1, -1, 1, 1)'$  为  $\mathbf{R}^4$  的标准正交基.

254

4.7 将格拉姆-施密特过程应用到  $\mathbf{R}^3$  的基  $(1, 1, 0)'$ ,  $(1, 0, 1)'$ ,  $(0, 1, 1)'$ .

4.8 令  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ . 求  $\mathbf{R}^2$  关于型  $X'AX$  的一个标准正交基.

4.9 求次数至多为 2 的所有多项式的向量空间  $P$  的一个标准正交基, 其上面的对称型定义为

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$$

4.10 令  $V$  表示实  $n \times n$  矩阵的向量空间. 证明  $\langle A, B \rangle = \text{trace}(A'B)$  在  $V$  上定义了一个正定双线性型, 并求这个型的标准正交基.

4.11 令  $W_1$  与  $W_2$  是具有对称双线性型的向量空间  $V$  的子空间. 证明

$$(a) (W_1 + W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp \quad (b) W \subset W^{\perp\perp} \quad (c) \text{如果 } W_1 \subset W_2, \text{ 则 } W_1^\perp \supset W_2^\perp$$

4.12 令  $V = \mathbf{R}^{2 \times 2}$  是实  $2 \times 2$  矩阵的向量空间.

(a) 确定  $V$  上双线性型  $\langle A, B \rangle = \text{trace}(AB)$  关于标准基  $\{e_{ij}\}$  的矩阵.

(b) 确定这个型的符号差.

(c) 求这个型的标准正交基.

(d) 在实  $n \times n$  矩阵的空间  $\mathbf{R}^{n \times n}$  上求型  $\text{trace}AB$  的符号差.

4.13 (a) 确定规则  $\langle A, B \rangle = \text{trace}(A^*B)$  是否在复矩阵空间  $\mathbf{C}^{n \times n}$  上定义了埃尔米特型. 如果定义了, 确定它的符号差.

(b) 对于由  $\langle A, B \rangle = \text{trace}(\overline{A}B)$  定义的型回答同样的问题.

4.14 定理 8.4.10 的矩阵形式断言如果  $A$  是实对称矩阵, 则存在可逆矩阵  $P$  使得  $P'AP$  是对角的. 用行列变换证明这个结论.

4.15 令  $W$  是由向量  $(1, 1, 0)'$  与  $(0, 1, 1)'$  张成的  $\mathbf{R}^3$  的子空间. 确定向量  $(1, 0, 0)'$  对于  $W$  的正交投影.

4.16 令  $V$  是  $3 \times 3$  矩阵的实向量空间, 带有双线性型  $\langle A, B \rangle = \text{trace}(A'B)$ , 且设  $W$  是斜对称矩阵的子空间. 计算对于  $W$  关于这个型的正交投影, 而型的矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

4.17 用(3.5.13)的方法计算向量  $(x_1, x_2, x_3)'$  关于例 8.4.14 中所描述的基  $B$  的坐标向量, 并用投影公式比较你的答案.



- 4.18 求投影  $\pi: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$  的矩阵使得  $\mathbf{R}^3$  的标准基的像构成等边三角形且  $\pi(e_1)$  为  $x$  轴方向的点.
- 4.19 令  $W$  是  $\mathbf{R}^3$  的子空间, 考虑  $\mathbf{R}^3$  到  $W$  的正交投影  $\pi$ . 设  $(a_i, b_i)'$  是  $\pi(e_i)$  关于  $W$  的一个选定标准正交基的坐标向量. 证明  $(a_1, a_2, a_3)$  与  $(b_1, b_2, b_3)$  是正交单位向量.
- 4.20 证明定理 8.4.19 所给出的正定性的判别准则. 该判别准则适用于埃尔米特矩阵吗?
- 4.21 证明西尔维斯特法则(见 8.4.17).
- 提示: 先证明如果  $W_1$  与  $W_2$  是  $V$  的子空间, 并且如果型在  $W_1$  上是正定的而在  $W_2$  上是半负定的, 则  $W_1$  与  $W_2$  是无关的.

### 第五节 欧几里得空间与埃尔米特空间

- 5.1 令  $V$  是欧几里得空间.
- (a) 证明施瓦兹不等式  $|\langle v, w \rangle| \leq |v| |w|$ .
- (b) 证明平行四边形法则  $|v+w|^2 + |v-w|^2 = 2|v|^2 + 2|w|^2$ .
- (c) 证明如果  $|v| = |w|$ , 则  $(v+w) \perp (v-w)$ .
- 5.2 令  $W$  是欧几里得空间  $V$  的子空间, 证明  $W = W^{\perp\perp}$ .
- 5.3 令  $w \in \mathbf{R}^n$  是长度为 1 的向量, 设  $U$  表示正交空间  $w^\perp$ . 关于  $U$  的反射  $r_w$  定义如下: 把向量  $v$  写为形式  $v = cw + u$ , 其中  $u \in U$ , 则  $r_w(v) = -cw + u$ .
- (a) 证明矩阵  $P = I - 2ww'$  是正交的.
- (b) 证明  $P$  的乘法是关于正交空间  $U$  的反射.
- (c) 令  $u, v$  是  $\mathbf{R}^n$  中等长的向量. 确定向量  $w$  使得  $Pu = v$ .
- 5.4 令  $T$  是  $V = \mathbf{R}^n$  上的线性算子, 其矩阵  $A$  是实对称矩阵.
- (a) 证明  $V$  是正交和  $V = (\ker T) \oplus (\text{im } T)$ .
- (b) 证明  $T$  是到  $\text{im } T$  的正交投影当且仅当(除了对称外)  $A^2 = A$ .
- 5.5 令  $P$  是酉矩阵, 设  $X_1$  与  $X_2$  是  $P$  的特征向量, 伴随于不同的特征值  $\lambda_1$  与  $\lambda_2$ . 证明  $X_1$  与  $X_2$  关于  $\mathbf{C}^n$  上的标准埃尔米特型是正交的.
- 5.6 什么复数可作为酉矩阵的特征值出现?

### 第六节 谱定理

- 6.1 证明命题 8.6.3(c), (d).
- 6.2 令  $T$  是欧几里得空间的对称算子. 用命题 8.6.9 证明: 如果  $v$  是一个向量, 且如果  $T^2 v = 0$ , 则  $Tv = 0$ .
- 6.3 关于既对称又正交的  $3 \times 3$  实矩阵, 由谱定理可得出什么结论?
- 6.4 关于使得  $A^* A$  为对角的矩阵  $A$  有什么结论?
- 6.5 证明: 如果  $A$  是斜对称实矩阵, 则  $iA$  是埃尔米特矩阵. 关于斜对称实矩阵, 由谱定理可得出什么结论?
- 6.6 证明: 可逆矩阵  $A$  是正规的当且仅当  $A^* A^{-1}$  是酉矩阵.
- 6.7 令  $P$  是有实特征值的正规的实矩阵, 证明  $P$  是对称的.
- 6.8 令  $V$  是复平面里单位圆周上可微复值函数空间, 且对于  $f, g \in V$ , 定义

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} \overline{f(\theta)} g(\theta) d\theta$$

- (a) 证明该型是埃尔米特与正定的.
- (b) 令  $W$  是由函数  $f(e^{i\theta})$  构成的  $V$  的子空间, 其中  $f$  是次数  $\leq n$  的多项式. 求  $W$  的标准正交基.

(c) 证明  $T = i \frac{d}{d\theta}$  是  $V$  上的埃尔米特算子, 并确定它在  $W$  上的特征值.

- 6.9 确定  $\mathbf{R}^2$  上其矩阵为  $\begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix}$  的型的符号差, 并确定正交矩阵  $P$  使得  $P^*AP$  是对角的.
- 6.10 证明: 如果  $T$  是埃尔米特空间  $V$  上的埃尔米特算子, 则规则  $\langle v, w \rangle = \langle v, Tw \rangle$  定义了  $V$  上另一个埃尔米特型.
- 6.11 证明伴随于埃尔米特矩阵  $A$  的不同特征值的特征向量是正交的.
- 6.12 求一个酉矩阵  $P$  使得当  $A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$  时,  $P^*AP$  是对角的.
- 6.13 求一个实正交矩阵  $P$  使得当  $A$  是下列矩阵时,  $P^*AP$  是对角的:

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (c) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- 6.14 证明实对称矩阵  $A$  是正定的当且仅当它的特征值是正的.
- 6.15 证明对于任意方阵  $A$ ,  $\ker A = (\operatorname{im} A^*)^\perp$ , 且如果  $A$  是正规的, 则  $\ker A = (\operatorname{im} A)^\perp$ .
- 6.16 令  $\xi = e^{2\pi i/n}$ , 且设  $A$  是  $n \times n$  矩阵, 其元素为  $a_{jk} = \xi^k / \sqrt{n}$ . 证明  $A$  是酉矩阵.
- 6.17 设  $A, B$  是可交换埃尔米特矩阵. 证明存在酉矩阵  $P$  使得  $P^*AP$  与  $P^*BP$  都是对角的.
- 6.18 用谱定理证明正定实对称  $n \times n$  矩阵  $A$  对某个矩阵  $P$ , 有形式  $A = P^*P$ .
- 6.19 证明循环移位算子

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ 1 & & & & 0 \end{bmatrix}$$

是酉的, 并确定它的对角化.

- 6.20 证明下面的循环矩阵

$$\begin{bmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_n \\ c_n & c_0 & \cdots & c_{n-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_0 \end{bmatrix}$$

是正规的.

- 6.21 正规矩阵  $A$  的特征值上的什么条件蕴含  $A$  是埃尔米特的?  $A$  是酉的?
- 6.22 对对称算子证明谱定理.

## 第七节 圆锥曲线与二次曲面

- 7.1 确定二次曲面  $x^2 + 4xy + 2xz + z^2 + 3x + z - 6 = 0$  的类型.
- 7.2 假设二次方程 (8.7.1) 表示椭圆, 除了先对角化然后再作平移而将型化为标准形式外, 我们也可先作平移. 说明如何确定所需的平移.
- 7.3 用方程的系数给出圆锥曲线到圆的充分必要条件.

7.4 用几何方法刻画退化的二次曲面.

### 第八节 斜对称型

- 8.1 令  $A$  是可逆斜对称实矩阵, 证明  $A^2$  是对称的与负定的.
- 8.2 令  $W$  是一个子空间, 在其上一个实斜对称型为非退化的. 求正交投影  $\pi: V \rightarrow W$  的公式.
- 8.3 令  $S$  是斜对称实矩阵, 证明  $I+S$  是可逆的, 且  $(I-S)(I+S)^{-1}$  是正交的.
- 8.4 令  $A$  是斜对称实矩阵.
- (a) 证明  $\det A \geq 0$ .
- (b) 证明如果  $A$  的元素是整数, 则  $\det A$  是整数的平方.

### 杂题

- M.1 根据西尔维斯特法则, 每个  $2 \times 2$  实对称矩阵恰与 6 个标准型之一同余. 列出它们. 如果考虑由  $P^* A = P A P^t$  定义的  $GL_2$  在  $2 \times 2$  矩阵上的作用, 则西尔维斯特法则断言对称矩阵构成 6 个轨道. 可视对称矩阵为  $\mathbf{R}^3$  里的点, 令  $(x, y, z)$  对应于矩阵  $\begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix}$ . 用几何方法描述如何将  $\mathbf{R}^3$  分解成轨道, 并做出描绘它的清晰图.
- 提示: 如果没有得到漂亮的结果, 则说明你没有理解结构.
- M.2 在下列情形描述矩阵  $AB+BA$  与  $AB-BA$  的对称性.
- (a)  $A, B$  是对称的. (b)  $A, B$  是埃尔米特的. (c)  $A, B$  是斜对称的.
- (d)  $A$  是对称的,  $B$  是斜对称的.
- M.3 用每一种下列类型的矩阵描述可能的行列式和特征值.
- (a) 实正交矩阵 (b) 酉矩阵 (c) 埃尔米特矩阵 (d) 实对称的负定矩阵 (e) 实斜对称矩阵
- M.4 令  $E$  是  $m \times n$  复矩阵, 证明矩阵  $\begin{bmatrix} I & E^* \\ -E & I \end{bmatrix}$  是可逆的.
- M.5 向量叉积  $x \times y = (x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1)^t$ . 令  $v$  是  $\mathbf{R}^3$  里一个固定向量, 且设  $T$  是线性算子  $T(x) = (x \times v) \times v$ .
- (a) 证明这个算子是对称的. 可利用标量三重积  $\det[x|y|z] = (x \times y) \cdot z$  但不是算子的矩阵的一般性质.
- (b) 计算矩阵.
- M.6 (a) 下列讨论什么地方错了? 令  $P$  是实正交矩阵. 设  $X$  是  $P$  的伴随于特征值  $\lambda$  的(可能是复的)特征向量. 这样,  $X^t P^t X = (P X)^t X = \lambda X^t X$ . 另一方面,  $X^t P^t X = X^t (P^{-1} X) = \lambda^{-1} X^t X$ . 所以,  $\lambda = \lambda^{-1}$ , 从而  $\lambda = \pm 1$ .
- (b) 在这个错误讨论的基础上叙述和证明正确的定理.
- M.7 令  $A$  是  $m \times n$  实矩阵, 证明在  $O_m$  里存在正交矩阵  $P$ , 在  $O_n$  里存在  $Q$ , 使得  $PAQ$  是对角的, 其中对角元是非负的.
- M.8 (a) 证明: 如果  $A$  是非奇异复矩阵, 则存在正定埃尔米特矩阵  $B$  使得  $B^2 = A^* A$ , 且  $B$  是由  $A$  唯一确定的.
- (b) 令  $A$  是非奇异矩阵, 设  $B$  是正定埃尔米特矩阵使得  $B^2 = A^* A$ , 证明  $AB^{-1}$  是酉的.
- (c) 证明极分解: 每个非奇异矩阵  $A$  是积  $A = UP$ , 其中  $P$  是正定埃尔米特矩阵且  $U$  是酉的.
- (d) 证明极分解是唯一的.
- (e) 关于酉群  $U_n$  在群  $GL_n$  上的左乘的作用有什么结论?

M.9 令  $V$  是  $n$  维欧几里得空间, 设  $S = (v_1, \dots, v_k)$  是  $V$  中向量的集合.  $S$  的正组合是线性组合  $p_1 v_1 + \dots + p_k v_k$ , 其中所有系数  $p_i$  是正的.  $V$  的与向量  $w$  正交的向量的子空间  $U = \{v \mid \langle v, w \rangle = 0\}$  叫做超平面. 一个超平面把  $V$  分成两个半空间  $\{v \mid \langle v, w \rangle \geq 0\}$  与  $\{v \mid \langle v, w \rangle \leq 0\}$ .

(a) 证明下列叙述是等价的:

- $S$  不包含在任一半空间内.
- 对  $V$  的每个非零向量  $w$ , 对某个  $i=1, \dots, k$ ,  $\langle v_i, w \rangle < 0$ .

(b) 令  $S'$  表示由在  $S$  中去掉  $v_k$  所得的集合. 证明: 如果  $S$  不包含在半空间里, 则  $S'$  张成  $V$ .

(c) 证明下列条件是等价的:

- (i)  $S$  不包含在半空间里.
- (ii)  $V$  中的每个向量是  $S$  的正组合.
- (iii)  $S$  张成  $V$ , 且  $0$  是  $S$  的正组合.

提示: 要证(i)蕴含(ii)或(iii), 我建议投影到与  $v_k$  正交的空间  $U$ . 这将允许你用归纳法.

259

M.10  $n \times n$  傅里叶矩阵  $A$  的行与列指标从  $0$  到  $n-1$ , 且  $i, j$  元素为  $\xi^{ij}$ , 其中  $\xi = e^{2\pi i/n}$ . 这个矩阵解决了下列插值问题: 给定复数  $b_0, \dots, b_{n-1}$ , 求复多项式  $f(t) = c_0 + c_1 t + \dots + c_{n-1} t^{n-1}$  使得  $F(\xi^j) = b_j$ .

(a) 解释矩阵如何解决问题.

(b) 证明  $A$  是对称的和正规的, 并计算  $A^2$ .

(c) 确定  $A$  的特征值.

M.11 令  $A$  是  $n \times n$  实矩阵. 证明  $A$  定义了到它的像  $W$  的正交投影当且仅当  $A^2 = A = A^t A$ .

M.12 令  $A$  是  $n \times n$  实正交矩阵.

(a) 令  $X$  是  $A$  的伴随于复特征值  $\lambda$  的复特征向量. 证明  $X^t X = 0$ . 把特征向量写为  $X = R + Si$ , 其中  $R$  与  $S$  是实向量. 证明由  $R$  与  $S$  张成的空间  $W$  是  $A$ -不变的, 并描述算子  $A$  到  $W$  的限制.

(b) 证明存在实正交矩阵  $P$  使得  $P^t A P$  是由  $1 \times 1$  与  $2 \times 2$  块组成的分块对角矩阵, 并描述这些块.

M.13 令  $V = \mathbf{R}^n$ , 设  $\langle X, Y \rangle = X^t A Y$ , 其中  $A$  是对称矩阵. 令  $W$  是由秩为  $r$  的  $n \times r$  矩阵  $M$  的列张成的  $V$  的子空间, 且设  $\pi: V \rightarrow W$  表示  $V$  到  $W$  的关于型  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  的正交投影. 可通过建立和解适当的对于  $Y$  的线性方程组把  $\pi$  写为形式  $\pi(X) = M Y$ . 用  $A$  与  $M$  确定  $\pi$  的矩阵. 在  $r=1$  与  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  为点积的情形里验证你的结果.  $A$  与  $M$  上的什么假设是必要的?

M.14  $\mathbf{R}^n$  里使得对所有  $i \neq j$  有  $(v_i \cdot v_j) < 0$  的向量  $v_i$  的最大个数是什么?

M.15 这个问题是关于变量  $x$  与  $y$  的实多项式的空间  $V$  的. 如果  $f$  是一个多项式,  $\partial_f$  表示算子  $f\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$ , 且  $\partial_f(g)$  表示应用这个算子到多项式  $g$  的结果.

(a) 规则  $\langle f, g \rangle = \partial_f(g)_0$  在  $V$  上定义一个双线性型, 下标  $0$  表示多项式在原点的值. 证明这个型是对称的和正定的, 且单项式  $x^i y^j$  构成  $V$  的正交基(不是标准正交基).

(b) 我们也有  $f$  的乘法算子, 记为  $m_f$ . 所以,  $m_f(g) = fg$ . 证明  $\partial_f$  与  $m_f$  是伴随算子.

(c) 当  $f = x^2 + y^2$  时, 算子  $\partial_f$  是拉普拉斯算子, 常记为  $\Delta$ . 一个多项式  $h$  是调和的, 如果  $\Delta h = 0$ . 令  $H$  表示调和多项式空间. 确定关于给定型与  $H$  正交的空间  $H^\perp$ .

260

## 第九章 线性群

在这些日子里，拓扑学的天使与抽象代数的魔鬼  
为争夺每一个数学方向的灵魂进行着斗争。

——Hermann Weyl<sup>⊖</sup>

### 第一节 典型群

一般线性群  $GL_n$  的子群称为线性群或矩阵群。最重要的群是特殊线性群、正交群、酉群及辛群——典型群。我们对其中一些较为熟悉，下面首先复习其定义。

实特殊线性群  $SL_n$  是行列式为 1 的实矩阵的群：

$$\text{【9.1.1】} \quad SL_n = \{P \in GL_n(\mathbf{R}) \mid \det P = 1\}$$

正交群  $O_n$  是使得  $P^t = P^{-1}$  的实矩阵的群：

$$\text{【9.1.2】} \quad O_n = \{P \in GL_n(\mathbf{R}) \mid P^t P = I\}$$

正交矩阵所做的基变换保持  $\mathbf{R}^n$  上的点积  $X^t Y$ 。

酉群  $U_n$  是使得  $P^* = P^{-1}$  的复矩阵的群：

$$\text{【9.1.3】} \quad U_n = \{P \in GL_n(\mathbf{C}) \mid P^* P = I\}$$

酉矩阵所做的基变换保持  $\mathbf{C}^n$  上的标准埃尔米特积  $X^* Y$ 。

辛群是  $\mathbf{R}^{2n}$  上的保持斜对称型  $X^t S Y$  的实矩阵的群，其中

$$S = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{【9.1.4】} \quad SP_{2n} = \{P \in GL_{2n}(\mathbf{R}) \mid P^t S P = S\}$$

不定型有类似正交群的结果。洛仑兹群是保持洛仑兹型(8.2.2)的实矩阵的群

$$\text{【9.1.5】} \quad O_{3,1} = \{P \in GL_n \mid P^t I_{3,1} P = I_{3,1}\}$$

由这些矩阵表示的线性算子叫做洛仑兹变换。对任意符号差  $p, m$  可定义类似的群  $O_{p,m}$ 。

加上特殊一词来表示行列式为 1 的矩阵的子群：

特殊正交群  $SO_n$ ：行列式为 1 的实正交矩阵，

特殊酉群  $SU_n$ ：行列式为 1 的酉矩阵。

虽然由定义这不是显然的，但辛矩阵的行列式总是 1，因而在两个记号中使用  $S$  并不会产生矛盾。

许多这样的群有类似的由相同关系定义的复数结果。但除第八节外， $GL_n$ ， $SL_n$ ， $O_n$  与  $SP_{2n}$  在本章都代表实数群。注意复正交群与酉群不一样。这两个群定义的性质分别为

261

⊖ 这段引语选自 Morris Kline 的著作《古今数学思想》。

$P^t P = I$  与  $P^* P = I$ .

我们计划描述典型群的几何性质, 将它们视为矩阵空间的子集. 来自拓扑学的词“同胚”将出现. 同胚  $\varphi: X \rightarrow Y$  是连续双射, 其逆函数也是连续的 [Munkres, p. 105]. 同胚的集合是拓扑等价的. 区分清楚“同态”与“同胚”的意义是非常重要的, 尽管不幸的是, 同胚的英文单词只是比同态多了一个字母.

我们熟悉一些线性群的几何图形. 例如, 单位圆

$$x_0^2 + x_1^2 = 1$$

有几个群的体现, 它们都是同构的. 写  $(x_0, x_1) = (\cos\theta, \sin\theta)$ , 把圆周与角度的加群等同起来. 或者, 通过  $e^{i\theta}$  把它看成复平面上的单位圆, 它变成了乘法群, 即  $1 \times 1$  酉矩阵的群:

$$\text{【9.1.6】} \quad U_1 = \{p \in \mathbf{C}^+ \mid \bar{p}p = 1\}$$

单位圆也可通过映射

$$\text{【9.1.7】} \quad (\cos\theta, \sin\theta) \rightsquigarrow \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

嵌入  $\mathbf{R}^{2 \times 2}$  里. 它与特殊正交群  $SO_2$  (即平面的旋转群) 同构. 这些是本质上同一个群的三种描述, 即圆周群.

粗略地讲, 线性群  $G$  的维数是矩阵在  $G$  中的自由度. 圆周群维数为 1. 群  $SL_2$  维数为 3, 因为方程  $\det P = 1$  从四个矩阵元素消去了一个自由度. 在第九节我们更谨慎地讨论维数, 但我们想首先描述一些低维数的群. 在有真正意义的非阿贝尔群里, 最小维数是 3, 且最重要的小维数群有  $SU_2$ ,  $SO_3$  与  $SL_2$ . 我们将在第三节和第四节检验特殊酉群  $SU_2$  与旋转群  $SO_3$ .

262

## 第二节 插曲: 球面

与  $\mathbf{R}^3$  中的单位球面类似, 轨迹

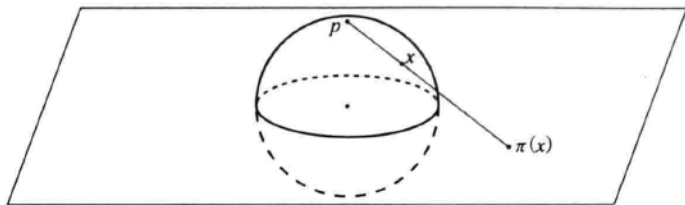
$$\{x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$$

在  $\mathbf{R}^{n+1}$  中称为  $n$  维单位球面, 或简称为  $n$ -球面, 记之为  $\mathbf{S}^n$ . 因此,  $\mathbf{R}^3$  中单位球面是 2-球面  $\mathbf{S}^2$ , 且  $\mathbf{R}^2$  中单位圆周是 1-球面  $\mathbf{S}^1$ . 与球面同胚的空间有时也称球面.

我们复习一下从 2-球面到平面的球极平面射影, 因为它可用来给出球面的拓扑描述, 其在维数方面有类似结果. 在  $(x_0, x_1, x_2)$ -空间  $\mathbf{R}^3$  中把  $x_0$  轴看作竖直轴. 球面上的北极是点  $p = (1, 0, 0)$ . 我们也把轨迹  $\{x_0 = 0\}$  与称为  $\mathbf{V}$  的平面等同起来, 且把  $\mathbf{V}$  中的坐标记为  $v_1, v_2$ .  $\mathbf{V}$  的点  $(v_1, v_2)$  对应于  $\mathbf{R}^3$  中的  $(0, v_1, v_2)$ .

球极平面射影  $\pi: \mathbf{S}^2 \rightarrow \mathbf{V}$  定义如下: 要得到球面上点  $x$  的像  $\pi(x)$ , 构造通过  $p$  与  $x$  的直线  $\ell$ . 投影  $\pi(x)$  是  $\ell$  与  $\mathbf{V}$  的交点. 投影除北极外在  $\mathbf{S}^2$  的其他所有点上都是双射的, 北极对应着“无穷远点”.

【9.2.1】图



球极平面射影

拓扑上构造球面的一个办法是将其作为平面  $V$  与北极这单个点的并.  $\pi$  的逆函数正是这一构造. 它把平面收缩在无穷远点附近, 因为在球面上围绕点  $p$  的小圈对应着平面中的大圈.

球极平面射影在赤道上恒等映射. 它把南半球双射地映到  $V$  的单位圆盘  $\{v_1^2 + v_2^2 \leq 1\}$ , 把北半球映到该单位圆盘的外面, 只是北极在圆盘的外面没有对应点. 另一方面, 南极的球极平面射影把北半球双射地映到单位圆盘. 两个半球都与单位圆盘一一对应. 这在拓扑上就提供了第二种构造球面的方法, 即将其作为单位圆盘的并, 而这两个单位圆盘沿着边缘粘连在一起. 这两个圆盘需要伸展, 就像吹气球一样, 做成一个真正的球.

要求得球极平面射影的公式, 我们把通过  $p$  与  $x$  的直线写成参数形式  $q(t) = p + t(x - p) = (1+t(x_0-1), tx_1, tx_2)$ . 当  $t = \frac{1}{1-x_0}$  时, 点  $q(t)$  在平面  $V$  中. 所以,

263

$$\text{【9.2.2】} \quad \pi(x) = (v_1, v_2) = \left( \frac{x_1}{1-x_0}, \frac{x_2}{1-x_0} \right)$$

从  $n$ -球面到  $n$ -空间的球极平面射影  $\pi$  恰以同样方式定义.  $n$ -球面的北极是点  $p = (1, 0, \dots, 0)$ , 我们把  $\mathbf{R}^{n+1}$  中的轨迹  $\{x_0 = 0\}$  与  $n$ -空间  $V$  等同起来.  $V$  的点  $(v_1, \dots, v_n)$  对应着  $\mathbf{R}^{n+1}$  中的  $(0, v_1, \dots, v_n)$ . 球面上点  $x$  的像  $\pi(x)$  是通过北极  $p$  与  $x$  的直线  $\ell$  与  $V$  的交点. 同以前一样, 北极  $p$  映到无穷远点, 且除  $p$  外,  $\pi$  在  $S^n$  的所有点处都是双射的.  $\pi$  的公式为

$$\text{【9.2.3】} \quad \pi(x) = \left( \frac{x_1}{1-x_0}, \dots, \frac{x_n}{1-x_0} \right)$$

这个投影把下半球面  $\{x_0 \leq 0\}$  双射地映到  $V$  的  $n$ -维单位球, 而南极的投影把上半球面  $\{x_0 \geq 0\}$  双射地映到单位球. 所以, 像 2-球面一样, 在拓扑上  $n$ -球面也有两种构造方法: 作为  $n$ -空间  $V$  与单个点  $p$  的并, 或两个  $n$ -维单位球的并, 而这两个单位球要沿着它们的边缘(即  $(n-1)$ -球面)粘连在一起, 并做适当的伸展.

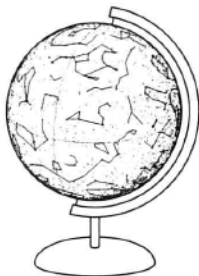
我们特别感兴趣 3-维球面  $S^3$ , 做些努力熟悉这个轨迹是值得的. 拓扑上,  $S^3$  可构造为 3-空间  $V$  与单个点  $p$  的并, 或构造为  $\mathbf{R}^3$  中两个单位球  $\{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 \leq 1\}$  的并, 两个单位球要沿着它们的边缘(为一般 2-球面)粘连并伸展. 每一种结构都不能在 3 维空间构造.

可将  $V$  看成我们生活的空间. 通过球极平面射影 3-球面  $S^3$  的下半球面对应着空间的单位球. 传统上, 将其描绘为地球仪, 即地球. 上半球面对应着地球的外部, 即天空.

另一方面, 上半球面通过南极投影可对应到单位球. 当用这种方式考虑时, 传统上是

把它描述成天球。(短语“地球”与“天球”作为数学术语较为合适,但它们不是传统叫法。)

【9.2.4】图



地球仪模型

264

要理解这一点需要一些思考. 当上半球面被表示为天球时, 球的中心对应于  $S^3$  的北极与我们的空间  $V$  的无穷远点. 从外部看地球仪时, 你必须想象你站在地球上, 看着天空. 把地球看成地球仪的中心是个寻常错误.

### 3-球面上的纬度与经度

地球仪(即 2-球面  $\{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ )上的常纬度曲线是水平圆周  $x_0 = c$ , 其中  $-1 < c < 1$ , 而常经度曲线是通过极点的竖直大圆. 经度曲线可描述为 2-球面与  $\mathbf{R}^3$  的包含极点  $(1, 0, 0)$  的 2 维子空间的交集.

当我们来到 3-球面  $\{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$  时, 维数增加了, 且必须要做应该与什么类似的决定. 我们使用下节将要学习的具有代数意义的群  $SU_2$  的类似.

作为 3-球面上的纬度曲线的类似, 我们取“水平”曲面, 即在其上  $x_0$  坐标是常数的曲面. 我们称它们为轨迹纬. 它们是由

$$\text{【9.2.5】} \quad x_0 = c, \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (1 - c^2), \quad \text{其中 } -1 < c < 1$$

嵌入  $\mathbf{R}^4$  的 2 维球面. 由  $x_0 = 0$  定义的特殊纬度是 3-球面与水平空间  $V$  的交集. 它是  $V$  中的单位 2-球面  $\{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1\}$ . 我们称这个纬度为赤道, 记之为  $E$ .

其次, 作为经度曲线的类似, 我们取通过北极  $(1, 0, 0, 0)$  的大圆. 它们是 3-球面与  $\mathbf{R}^4$  的包含极点的 3 维子空间  $W$  的交集. 交集  $L = W \cap S^3$  是  $W$  里的单位圆, 我们称  $L$  为经. 如果选取空间  $W$  的标准正交基  $(p, v)$ , 则第一向量是北极, 经有参数方程

$$\text{【9.2.6】} \quad L: \ell(\theta) = \cos\theta p + \sin\theta v$$

这是基本的结论, 但我们在下面证明它.

因此,  $S^3$  上的纬是 2-球面, 而经是 1-球面.

【9.2.7】引理 令  $(p, v)$  是  $\mathbf{R}^4$  的子空间  $W$  的标准正交基, 第一向量是北极  $p$ , 且设  $L$  是  $W$  中单位向量的经.

(a)  $L$  交赤道  $E$  于两个点. 如果  $v$  是其中一个点, 则另一个点是  $-v$ .

(b)  $L$  有参数化(方程)(9.2.6). 如果  $q$  是  $L$  的点, 则如有必要用  $-v$  替换  $v$ , 可把  $q$  表示为



$\ell(\theta)$  的形式, 其中  $\theta$  属于区间  $0 \leq \theta \leq \pi$ , 这样, 对所有  $\theta \neq 0, \pi$ ,  $L$  的点的这个表示是唯一的.

(c) 除了两个极点外, 球面  $S^3$  的每个点都位于唯一一个经上.

**证明** 我们略去(a)的证明.

(b) 通过计算  $W$  的向量  $ap + bv$  的长度可得证:

265

$$|ap + bv|^2 = a^2(p \cdot p) + 2ab(p \cdot v) + b^2(v \cdot v) = a^2 + b^2$$

所以,  $ap + bv$  是单位向量当且仅当点  $(a, b)$  位于单位圆周上, 在这个情形里, 对某个  $\theta$ ,  $a = \cos\theta$ ,  $b = \sin\theta$ .

(c) 令  $x$  是  $\mathbf{R}^4$  中的单位向量, 不在竖直轴上. 这样, 集合  $(p, x)$  是无关系的, 从而张成包含  $p$  的 2-维子空间  $W$ . 所以,  $x$  恰位于一个这样的子空间里, 从而恰在一个经上. ■

### 第三节 特殊酉群 $SU_2$

$SU_2$  的元素是形如

$$\text{【9.3.1】} \quad P = \begin{bmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix}, \quad \text{其中 } \bar{a}a + \bar{b}b = 1$$

的  $2 \times 2$  复矩阵.

我们来证明这个结论. 令  $P = \begin{bmatrix} a & b \\ u & v \end{bmatrix}$  是  $SU_2$  的元素, 其中  $a, b, u, v$  属于  $\mathbf{C}$ . 定义  $SU_2$  的方程是  $P^* = P^{-1}$  且  $\det P = 1$ . 当  $\det P = 1$  时, 方程  $P^* = P^{-1}$  变成了

$$\begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{u} \\ \bar{b} & \bar{v} \end{bmatrix} = P^* = P^{-1} = \begin{bmatrix} v & -b \\ -u & a \end{bmatrix}$$

所以,  $v = \bar{a}$ ,  $u = -\bar{b}$ , 这样,  $\det P = \bar{a}a + \bar{b}b = 1$ .

$a = x_0 + x_1 i$  与  $b = x_2 + x_3 i$  定义了  $SU_2$  与  $\mathbf{R}^4$  中的 3-球面  $\{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$  的一一对应.

$$SU_2 \quad \longleftrightarrow \quad S^3$$

$$\text{【9.3.2】} \quad P = \begin{bmatrix} x_0 + x_1 i & x_2 + x_3 i \\ -x_2 + x_3 i & x_0 - x_1 i \end{bmatrix} \longleftrightarrow (x_0, x_1, x_2, x_3)$$

这给出  $SU_2$  的元素的两个记号. 我们尽可能多地使用矩阵记号, 因为对于群计算它是最好的, 但长度和正交性涉及  $\mathbf{R}^4$  中的点积.

**注意** 3-球面有群结构的事实是非常值得注意的. 没有办法把 2-球面做成群. 一个著名的拓扑定理断言, 能够定义具有连续的群法则的球面只有 1-球面和 3-球面.

用矩阵记号, 球面上的北极  $e_0 = (1, 0, 0, 0)$  是恒等矩阵  $I$ . 其他标准基向量是定义四元数群的矩阵(2.4.5). 作为参考, 我们再次列出它们:

$$\text{【9.3.3】} \quad i = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \quad j = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad k = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} \longleftrightarrow e_1, e_2, e_3$$

这些矩阵满足在(2.4.6)中所展示的诸如  $ij = k$  的关系. 具有基  $(I, i, j, k)$  的实向量空间

叫做四元数代数. 所以,  $SU_2$  可看成四元数代数里单位向量集合.

266

**【9.3.4】引理** 除了两种特殊矩阵  $\pm I$  外,  $P(9.3.2)$  的特征值是绝对值 1 的复共轭数.

**证明**  $P$  的特征多项式是  $t^2 - 2x_0t + 1$ , 且它的判别式  $D$  为  $4x_0^2 - 4$ . 当  $(x_0, x_1, x_2, x_3)$  在单位球面上时,  $x_0$  属于区间  $-1 \leq x_0 \leq 1$ , 且  $D \leq 0$ . (事实上, 任意酉矩阵的特征值有绝对值 1.)

我们现在描述  $SU_2$  上对应于前节定义的  $S^3$  上的经和纬的代数结构.

**【9.3.5】命题**  $SU_2$  里的纬是共轭类. 对于区间  $-1 < c < 1$  中给定的  $c$ , 纬由  $SU_2$  中使得  $\text{trace}P = 2c$  的矩阵  $P$  组成. 剩下的共轭类为  $\{I\}$  与  $\{-I\}$ . 它们构成  $SU_2$  的中心.

该命题由下列引理可得.

**【9.3.6】引理** 令  $P$  是  $SU_2$  的具有特征值  $\lambda$  与  $\bar{\lambda}$  的元素. 则在  $SU_2$  里存在元素  $Q$  使得  $Q^*PQ$  是对角矩阵  $\Lambda$ , 其对角元为  $\lambda$  与  $\bar{\lambda}$ . 所以,  $SU_2$  里具有相同特征值或相同迹的所有元素是共轭的.

**证明** 可把引理的证明基于酉算子的谱定理上, 或者直接证明如下: 令  $X = (u, v)^t$  是  $P$  的伴随于特征值  $\lambda$  的长度为 1 的特征向量, 且设  $Y = (-\bar{v}, \bar{u})^t$ . 能够验证  $Y$  是  $P$  的伴随于特征值  $\bar{\lambda}$  的特征向量, 矩阵  $Q = \begin{bmatrix} u & -\bar{v} \\ v & \bar{u} \end{bmatrix}$  属于  $SU_2$  且  $PQ = Q\Lambda$ .

$SU_2$  的赤道  $\mathbf{E}$  是由方程  $\text{trace}P = 0$  (或  $x_0 = 0$ ) 定义的纬. 赤道上的点有形式

$$\mathbf{【9.3.7】} \quad A = \begin{bmatrix} x_1i & x_2 + x_3i \\ -x_2 + x_3i & -x_1i \end{bmatrix} = x_1i + x_2j + x_3k$$

注意矩阵  $A$  是斜埃尔米特的:  $A^* = -A$ , 且它的迹为 0. 以前我们没有遇到过斜埃尔米特矩阵, 但它们与埃尔米特矩阵是紧密相关的: 矩阵  $A$  是斜埃尔米特的当且仅当  $iA$  是埃尔米特的.

迹为 0 的  $2 \times 2$  斜埃尔米特矩阵构成 3 维实向量空间, 记之为  $\mathbf{V}$ , 与上节使用过的记号一致. 空间  $\mathbf{V}$  是与  $I$  正交的空间. 它有基  $(i, j, k)$ , 且  $\mathbf{E}$  是  $\mathbf{V}$  中单位 2-球面.

**【9.3.8】命题** 关于  $SU_2$  的元素  $A$ , 下列条件是等价的:

- $A$  在赤道上, 亦即  $\text{trace}A = 0$ ,
- $A$  的特征值是  $i$  或  $-i$ ,
- $A^2 = -I$ .

**证明** 前两个叙述是等价的由观察特征多项式  $t^2 - (\text{trace}A)t + 1$  得到. 对于第三个叙述, 注意  $-I$  是  $SU_2$  中具有特征值  $-1$  的唯一矩阵. 如果  $\lambda$  是  $A$  的特征值, 则  $\lambda^2$  是  $A^2$  的特征值. 所以, 在  $A^2 = -I$  的情形里,  $\lambda = \pm i$  当且仅当  $A^2$  有特征值  $-1$ .

267

其次, 考虑  $SU_2$  的经, 它是  $SU_2$  与  $\mathbf{R}^1$  的包含极点  $I$  的 2 维子空间的交集. 我们使用矩阵记号.

**【9.3.9】命题** 令  $W$  是  $\mathbf{R}^1$  的包含极点  $I$  的 2 维子空间, 且设  $L$  是  $W$  里单位向量的经.

(a)  $L$  交赤道  $\mathbf{E}$  于两点. 如果  $A$  是其中之一, 则另一个是  $-A$ . 而且,  $(I, A)$  是  $W$  的标准正交基.

(b)  $L$  的元素可写成形式  $P_\theta = (\cos\theta)I + (\sin\theta)A$ , 其中  $A$  在  $\mathbf{E}$  上, 且  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . 当

$P \neq \pm I, A$  时,  $\theta$  可选取为  $0 < \theta < \pi$ , 从而  $P$  的表达式是唯一的.

(c) 除  $\pm I$  外,  $SU_2$  的每个元素位于唯一的经上. 元素  $\pm I$  位于每个经上.

(d) 经是  $SU_2$  的共轭子群.

**证明** 当转换成矩阵记号时, 前三个断言成为引理 9.2.7. 要证明(d), 首先证明经  $L$  是子群. 令  $c, s$  与  $c', s'$  分别表示角  $\alpha$  与  $\alpha'$  的正弦与余弦, 且设  $\beta = \alpha + \alpha'$ . 这样, 因为  $A^2 = -I$ , 故正弦和余弦的加法公式表明

$$(cI + sA)(c'I + s'A) = (cc' - ss')I + (cs' + sc')A = (\cos\beta)I + (\sin\beta)A$$

所以,  $L$  在乘法下是封闭的. 它在逆下也是封闭的.

最后, 我们证明经是共轭的. 比如说,  $L$  同上面一样, 为经  $P_\theta = cI + sA$ . 由命题 9.3.5 知  $A$  共轭于  $i$ , 比如说  $i = QAQ^*$ . 这样,  $QP_\theta Q^* = cQIQ^* + sQAQ^* = cI + si$ . 所以,  $L$  共轭于经  $cI + si$ . ■

### 【9.3.10】例

- 经  $cI + si$  是  $SU_2$  里的对角矩阵群, 其中  $c = \cos\theta, s = \sin\theta$ . 用  $T$  记这个经. 它的元素有形式

$$c \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} i & \\ & -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{i\theta} & \\ & e^{-i\theta} \end{bmatrix}$$

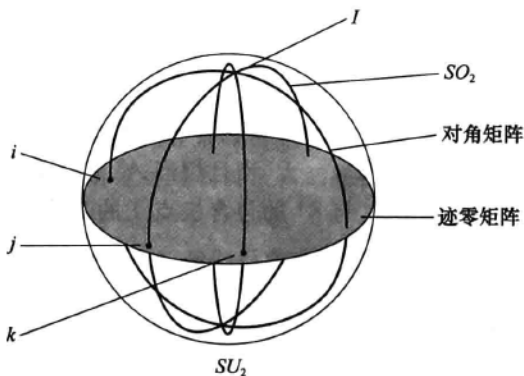
- 纬  $cI + sj$  是  $SU_2$  里的实矩阵群, 它是旋转群  $SO_2$ . 矩阵  $cI + sj$  表示转过角度  $-\theta$  的平面的旋转.

$$c \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} & 1 \\ -1 & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}$$

以前我们没有遇到过经  $cI + sk$ . ■

下面的图形为 Bill Schelter 所构筑. 它表示 3-球面  $SU_2$  到平面里单位圆盘的投影. 图中所示的椭圆盘是赤道的像. 恰如一个圆从  $\mathbf{R}^3$  到  $\mathbf{R}^2$  的正交投影是一个椭圆一样, 2-球面  $\mathbf{E}$  从  $\mathbf{R}^4$  到  $\mathbf{R}^3$  的投影是一个椭球, 这个椭球到平面的进一步投影将其映到椭圆盘. 圆盘内部的每个点是  $\mathbf{E}$  的两个点的像.

### 【9.3.11】图



$SU_2$  的一些纬与经

### 第四节 旋转群 $SO_3$

因为  $SU_2$  的赤道  $\mathbf{E}$  是共轭类, 所以群通过共轭作用于它. 我们将证明由  $SU_2$  的元素  $P$  确定的共轭作用(记之为  $\gamma_P$ )旋转这个球面. 这将允许我们用特殊酉群  $SU_2$  描述 3 维旋转群  $SO_3$ .

$\mathbf{E}$  的非平凡旋转的极点是它的固定不动点, 为  $\mathbf{E}$  与旋转轴的交点(5.1.22). 如果  $A$  在  $\mathbf{E}$  上, 则用  $(A, \alpha)$  表示绕极点  $A$  转过角度  $\alpha$  的旋转  $\mathbf{E}$  的自旋. 两个自旋  $(A, \alpha)$  与  $(-A, -\alpha)$  表示同一旋转.

#### 【9.4.1】定理

(a) 规则  $P \rightsquigarrow \gamma_P$  定义满同态  $\gamma: SU_2 \rightarrow SO_3$ , 即自旋同态. 它的核是  $SU_2$  的中心  $\{\pm I\}$ .

(b) 假设  $P = \cos\theta I + \sin\theta A$ , 其中  $0 < \theta < \pi$  且  $A$  在  $\mathbf{E}$  上, 则  $\gamma_P$  绕极点  $A$  转过角度  $2\theta$  旋转  $\mathbf{E}$ . 所以,  $\gamma_P$  由自旋  $(A, 2\theta)$  表示.

由这个定理描述的同态  $\gamma$  叫做  $SU_2$  的正交表示. 它映  $SU_2$  的一个  $2 \times 2$  复矩阵  $P$  为一个神秘的  $3 \times 3$  实矩阵, 即  $\gamma_P$  的矩阵. 定理告诉我们除  $\pm I$  外,  $SU_2$  的每个元素均可描述为一个非平凡旋转以及选择好了的自旋. 正因为如此,  $SU_2$  常叫做自旋群.

在证明定理前我们讨论映射  $\gamma$  的几何性质. 如果  $P$  是  $SU_2$  的点, 则点  $-P$  是它的对极点. 因为  $\gamma$  是满的, 且因为它的核是中心  $Z = \{\pm I\}$ , 故  $SO_3$  同构于商群  $SU_2/Z$ , 其元素为对极点的偶对, 即  $Z$  的陪集  $\{\pm P\}$ . 因为  $\gamma$  是二对一的, 故  $SU_2$  叫做  $SO_3$  的双重覆盖.

269

1-球面到它自身的同态  $\mu: SO_2 \rightarrow SO_2$  定义为  $\rho_\theta \rightsquigarrow \rho_{2\theta}$ , 它是另一个密切相关的双重覆盖的例子.  $\mu$  的每个纤维由两个旋转  $\rho_\theta$  与  $\rho_{\theta+\pi}$  组成.

正交表示有助于描述旋转群的拓扑结构. 因为  $SO_3$  的元素对应于  $SU_2$  的对极点的偶对, 故在 3-球面上可拓扑地通过等同对极点得到  $SO_3$ . 这样得到的空间叫做(实)射影 3-空间, 记之为  $\mathbf{P}^3$ .

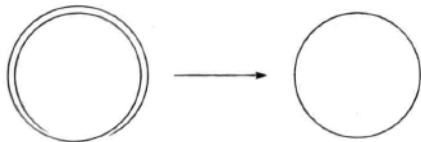
#### 【9.4.2】

$SO_3$  同胚于射影 3-空间  $\mathbf{P}^3$

$\mathbf{P}^3$  的点与  $\mathbf{R}^1$  的 1 维子空间一一对应. 每个 1 维子空间交 3-球面于一对对极点.

射影 3-空间  $\mathbf{P}^3$  比球面  $S^3$  难图示. 然而, 容易描述射影 1-空间  $\mathbf{P}^1$ , 即通过等同单位圆  $S^1$  的对极点得到的集合. 如果我们缠绕  $S^1$  一圈使它成为图(9.4.3)左边的图形, 则右边的图形将是  $\mathbf{P}^1$ . 拓扑上,  $\mathbf{P}^1$  也是圆.

#### 【9.4.3】图



1-球面的双重覆盖

我们以试图扩展到较高维射影空间的方式再次描述  $\mathbf{P}^1$ . 除水平轴上两个点外, 单位圆

的对极点的每个偶对仅包含下半圆的一个点. 所以, 要得到  $\mathbf{P}^1$ , 我们简单地把点对与下半圆的单个点等同起来. 但半圆的端点(即水平轴上的两个点)仍必须等同起来. 于是, 把端点粘连在一起, 就得到如以前的圆.

原则上, 同样的方法可用来描述  $\mathbf{P}^2$ . 除 2-球面的赤道上的点外, 对极点的偶对恰含有下半球面的一个点. 所以, 通过把赤道的相对点等同起来可由下半球面构造  $\mathbf{P}^2$ . 让我们想象把赤道的短弧和与其相对的短弧通过粘连等同起来. 不幸的是, 当给赤道定向并一直往前运行时, 我们看到相对的短弧得到相反的方向. 因此, 当粘连这两个短弧在一起时, 必须扭曲一下. 这就给出了拓扑上的默比乌斯带, 且  $\mathbf{P}^2$  含有这个默比乌斯带. 它不是可定向的曲面.

要图示  $\mathbf{P}^3$ , 可在  $\mathbf{S}^3$  中取下半球面, 并把它的赤道  $\mathbf{E}$  的对极点等同起来. 或者, 取地球仪并把它的边缘(即地球的表面)的对极点等同起来. 这是很令人眼花缭乱的.

270

我们现在证明定理 9.4.1. 回忆赤道  $\mathbf{E}$  是迹为零的斜埃尔米特矩阵(9.3.7)的 3 维空间  $\mathbf{V}$  里的单位 2-球面. 由  $SU_2$  的元素  $P$  确定的共轭既保持迹也保持斜埃尔米特性质, 所以, 将这个共轭记为  $\gamma_P$ , 它作用在整个空间  $\mathbf{V}$  上. 关键是要证明  $\gamma_P$  为一个旋转. 这由下面的引理 9.4.5 给出.

令  $\langle U, V \rangle$  表示  $\mathbf{V}$  上的型, 它是由  $\mathbf{R}^3$  上的点积搬过来的.  $\mathbf{V}$  的基对应于  $\mathbf{R}^3$  的标准基  $(i, j, k)$ (9.3.3). 写  $U = u_1 i + u_2 j + u_3 k$ , 且对  $V$  也用类似的记号. 这样

$$\langle U, V \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

**[9.4.4] 引理** 记号同上,  $\langle U, V \rangle = -\frac{1}{2} \text{trace}(UV)$ .

**证明** 用四元数关系(2.4.6)计算积  $UV$ :

$$UV = (u_1 i + u_2 j + u_3 k)(v_1 i + v_2 j + v_3 k) = -(u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3)I + U \times V$$

其中  $U \times V$  是向量叉积

$$U \times V = (u_2 v_3 - u_3 v_2)i + (u_3 v_1 - u_1 v_3)j + (u_1 v_2 - u_2 v_1)k$$

这样, 因为  $\text{trace}I = 2$ , 且  $i, j, k$  的迹为 0, 故

$$\text{trace}(UV) = -2(u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3) = -2\langle U, V \rangle \quad \blacksquare$$

**[9.4.5] 引理** 算子  $\gamma_P$  是  $\mathbf{E}$  和  $\mathbf{V}$  的旋转.

**证明** 回忆  $\gamma_P$  是由  $\gamma_P U = PUP^*$  定义的算子. 证明这个算子为旋转的最保险的办法也许是计算它的矩阵. 但矩阵太复杂以致得不到许多领悟. 直接描述  $\gamma_P$  会好些. 我们将证明  $\gamma_P$  是行列式为 1 的线性算子. 欧拉定理 5.1.25 将告诉我们它是一个旋转.

要证  $\gamma_P$  是线性算子, 必须证明对  $\mathbf{V}$  中的所有  $U$  与  $V$  和所有实数  $r$ , 有  $\gamma_P(U+V) = \gamma_P U + \gamma_P V$  与  $\gamma_P(rU) = r(\gamma_P U)$ . 我们略去这些例行公事的证明. 要证  $\gamma_P$  是正交的, 我们验证如下的正交性判别法则(8.6.9):

**[9.4.6]**  $\langle \gamma_P U, \gamma_P V \rangle = \langle U, V \rangle$

因为共轭保持迹, 故这可由前面引理得证.

$$\begin{aligned}\langle \gamma_P U, \gamma_P V \rangle &= -\frac{1}{2} \text{trace}((\gamma_P U)(\gamma_P V)) = -\frac{1}{2} \text{trace}(PUP^*PVP^*) \\ &= -\frac{1}{2} \text{trace}(PUVP^*) = -\frac{1}{2} \text{trace}(UV) = \langle U, V \rangle\end{aligned}$$

最后, 要证  $\gamma_P$  的行列式为 1, 我们回忆任意正交矩阵的行列式为  $\pm 1$ . 因为  $SU_2$  是个球面, 故它是路连通的. 又因为行列式为连续函数, 故  $\det \gamma_P$  只能取到两个值  $\pm 1$  中的一个. 当  $P=I$  时,  $\gamma_P$  是恒等算子, 从而有行列式 1. 因此, 对每个  $P$ ,  $\det \gamma_P = 1$ . ■

271

我们现在证明定理的(a)部分. 因为  $\gamma_P$  是旋转, 故  $\gamma$  映  $SU_2$  到  $SO_3$ . 验证  $\gamma$  为同态是简单的:  $\gamma_P \gamma_Q = \gamma_{PQ}$ , 因为

$$\gamma_P(\gamma_Q U) = P(QUQ^*)P^* = (PQ)U(PQ)^* = \gamma_{PQ}U$$

接下来证明  $\gamma$  的核是  $\pm I$ . 如果  $P$  属于它的核, 则由  $P$  确定的共轭固定  $\mathbf{E}$  的每个元素不动. 这就意味着  $P$  与每个元素可交换.  $SU_2$  的任意元素可写成形式  $Q=cI+sB$ , 其中  $B$  属于  $\mathbf{E}$ . 这样,  $P$  也与  $Q$  交换. 因此,  $P$  属于  $SU_2$  的中心  $\{\pm I\}$ . 一旦我们确定  $2\theta$  为旋转的角度, 则  $\gamma$  是满同态的事实将得证, 因为每个角  $\alpha$  有形式  $2\theta$ , 其中  $0 \leq \theta \leq \pi$ .

令  $P$  是  $SU_2$  的元素, 写成形式  $P = \cos\theta I + \sin\theta A$ , 其中  $A$  属于  $\mathbf{E}$ .  $\gamma_P A = A$  成立, 所以,  $A$  是  $\gamma_P$  的极点. 令  $\alpha$  表示  $\gamma_P$  绕极点  $A$  旋转的角度. 要确定这个角, 我们首先证明对共轭类里单个矩阵  $P$  确定这个角就足够了.

比如说,  $P' = QPQ^* (= \gamma_Q P)$  是共轭的, 其中  $Q$  是  $SU_2$  的另一个元素. 这样,  $P' = \cos\theta I + \sin\theta A'$ , 其中  $A' = \gamma_Q A = QAQ^*$ . 角度  $\theta$  没有变化.

其次, 应用推论 5.1.28, 其断言如果  $M$  与  $N$  是  $SO_3$  的元素, 且如果  $M$  是绕极点  $X$  转过角度  $\alpha$  的旋转, 则共轭  $M' = NMN^{-1}$  是绕极点  $NX$  转过同一角度  $\alpha$  的旋转. 因为  $\gamma$  是同态, 故  $\gamma_{P'} = \gamma_Q \gamma_P \gamma_Q^{-1}$ . 由于  $\gamma_P$  是绕  $A$  转过角度  $\alpha$  的旋转, 故  $\gamma_{P'}$  是绕  $A' = \gamma_Q A$  转过角度  $\alpha$  的旋转. 角度  $\alpha$  也没有变化.

正因为这样, 我们做矩阵  $P = \cos\theta I + \sin\theta i$  的计算, 这是对角元为  $e^{i\theta}$  与  $e^{-i\theta}$  的对角矩阵. 应用  $\gamma_P$  到  $j$ :

$$\begin{aligned}\text{【9.4.7】} \quad \gamma_P j &= PjP^* = \begin{bmatrix} e^{i\theta} & \\ & e^{-i\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & 1 \\ -1 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-i\theta} & \\ & e^{i\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & e^{2i\theta} \\ -e^{-2i\theta} & \end{bmatrix} \\ &= \cos 2\theta j + \sin 2\theta k\end{aligned}$$

集合  $(j, k)$  是正交空间  $W$  到  $i$  的标准正交基, 上面的方程表明  $\gamma_P$  在  $W$  中将向量  $j$  旋转了角度  $2\theta$ . 旋转角度是  $2\theta$ , 不出所料. 这就完成了定理 9.4.1 的证明.

## 第五节 单参数群

在第五章, 我们使用矩阵值函数

$$\text{【9.5.1】} \quad e^{tA} = I + \frac{tA}{1!} + \frac{t^2 A^2}{2!} + \frac{t^3 A^3}{3!} + \dots$$

来描述微分方程  $\frac{dX}{dt} = AX$  的解. 同样的函数描述一般线性群里的单参数群——从实数加群

$\mathbf{R}^+$  到  $GL_n$  的可微同态.

**【9.5.2】定理**

(a) 令  $A$  是任意实或复矩阵, 且设  $GL_n$  表示  $GL_n(\mathbf{R})$  或  $GL_n(\mathbf{C})$ . 则由  $\varphi(t) = e^{tA}$  定义的映射  $\varphi: \mathbf{R}^+ \rightarrow GL_n$  是群同态.

(b) 反过来, 令  $\varphi: \mathbf{R}^+ \rightarrow GL_n$  是可微同态映射, 且设  $A$  表示它在原点的导数  $\varphi'(0)$ , 则对所有  $t$ , 有  $\varphi(t) = e^{tA}$ .

证明 对任意实数  $r$  与  $s$ , 矩阵  $rA$  与  $sA$  可交换. 所以(见(5.4.4))

**【9.5.3】**

$$e^{(r+s)A} = e^{rA} e^{sA}$$

这表明  $e^{tA}$  是同态. 反过来, 令  $\varphi: \mathbf{R}^+ \rightarrow GL_n$  是可微同态, 则  $\varphi(\Delta t + t) = \varphi(\Delta t)\varphi(t)$  且  $\varphi(t) = \varphi(0)\varphi(t)$ . 所以, 我们可用差商除  $\varphi(t)$ :

**【9.5.4】**

$$\frac{\varphi(\Delta t + t) - \varphi(t)}{\Delta t} = \frac{\varphi(\Delta t) - \varphi(0)}{\Delta t} \varphi(t)$$

当  $\Delta t \rightarrow 0$  取极限, 我们看到  $\varphi'(t) = \varphi'(0)\varphi(t) = A\varphi(t)$ . 所以,  $\varphi(t)$  是微分方程

**【9.5.5】**

$$\frac{d\varphi}{dt} = A\varphi$$

的解, 为矩阵值函数. 函数  $e^{tA}$  是另一个解, 当  $t=0$  时, 这两个解都取值  $I$ . 所以,  $\varphi(t) = e^{tA}$  (见(5.4.9)).

**【9.5.6】例**

(a) 令  $A$  是  $2 \times 2$  矩阵单位  $e_{12}$ , 则  $A^2 = 0$ . 幂级数展开式除两项外所有项均为 0, 从而  $e^{tA} = I + e_{12}t$ .

如果  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ , 则  $e^{tA} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

(b)  $SO_2$  的通常参数化是单参数群.

如果  $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ , 则  $e^{tA} = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$ .

(c) 复平面单位圆的通常参数化是  $U_1$  里的单参数群.

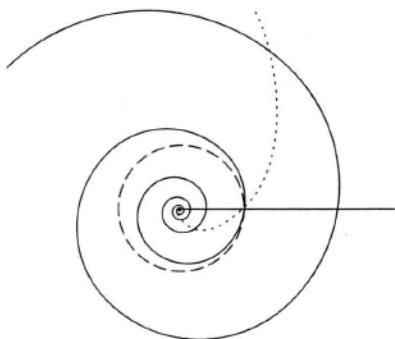
如果  $a$  是一个非零实数且  $\alpha = ai$ , 则  $e^\alpha = [\cos at + i \sin at]$ .

如果  $\alpha$  是绝对值  $\neq 1$  的非实复数, 则  $e^\alpha$  在  $\mathbf{C}^\times$  里的像是对数螺旋线. 如果  $a$  是一个非零实数, 则  $e^\alpha$  的像是正实轴, 且如果  $a=0$ , 则像由单独的点 1 构成.

如果已知  $GL_n$  的子群  $H$ , 我们也可寻找  $H$  里的单参数群, 即其像属于  $H$  的单参数群, 或可微同态  $\varphi: \mathbf{R}^+ \rightarrow H$ . 结果是正维数的线性群总有单参数群, 并且对一个特别的群不难确定它们.

因为单参数群与  $n \times n$  矩阵一一对应, 所以我们寻找矩阵  $A$  使得对所有  $t$  有  $e^{tA}$  属于  $H$ . 我们将在正交群、酉群和特殊线性群里确定单参数群.

## 【9.5.7】图

 $C^{\times} = GL_1(C)$  的一些单参数群的像

## 【9.5.8】命题

(a) 如果  $A$  是实斜对称矩阵 ( $A^t = -A$ ), 则  $e^A$  是正交的. 如果  $A$  是复斜对称矩阵 ( $A^* = -A$ ), 则  $e^A$  是酉的.

(b) 正交群  $O_n$  里的单参数群是同态  $t \rightsquigarrow e^{tA}$ , 其中  $A$  是实斜对称矩阵.

(c) 酉群  $U_n$  里的单参数群是同态  $t \rightsquigarrow e^{tA}$ , 其中  $A$  是复斜埃尔米特矩阵.

**证明** 我们讨论复的情形.

关系  $(e^A)^* = e^{(A^*)}$  由幂指数的定义可得, 且我们知道  $(e^A)^{-1} = e^{(-A)}$  (5.4.5). 所以, 如果  $A$  是斜埃尔米特矩阵, 亦即  $A^* = -A$ , 则  $(e^A)^* = (e^A)^{-1}$ , 且  $e^A$  是酉的. 这对复矩阵的情形证明了(a).

其次, 如果  $A$  是斜埃尔米特矩阵, 则  $tA$  也是. 且由上面所证的, 对所有  $t$ ,  $e^{tA}$  是酉矩阵, 所以它在酉群中是单参数群. 反之, 假设对所有  $t$ ,  $e^{tA}$  是酉矩阵. 把这写为  $e^{tA*} = e^{-tA}$ . 这个方程两边的导数在  $t=0$  时一定是相等的, 所以,  $A^* = -A$ , 且  $A$  是斜埃尔米特矩阵.

当我们将  $A^*$  变成  $A^t$  时, 正交群的证明是相同的. ■

接下来我们考虑特殊线性群  $SL_n$ .

【9.5.9】引理 对任意方阵  $A$ ,  $e^{\text{trace}A} = \det A$ .

**证明**  $A$  的伴随于特征值  $\lambda$  的特征向量  $X$  也是  $e^A$  的伴随于特征值  $e^\lambda$  的特征向量. 所以, 如果  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  是  $A$  的特征值, 则  $e^A$  的特征值是  $e^{\lambda_i}$ .  $A$  的迹是和  $\lambda_1 + \dots + \lambda_n$ , 且  $e^A$  的行列式是积  $e^{\lambda_1} \cdots e^{\lambda_n}$  (4.5.15). 所以,  $e^{\text{trace}A} = e^{\lambda_1 + \dots + \lambda_n} = e^{\lambda_1} \cdots e^{\lambda_n} = \det A$ . ■

274

【9.5.10】命题 特殊线性群  $SL_n$  里的单参数群是同态  $t \rightsquigarrow e^{tA}$ , 其中  $A$  是其迹为 0 的实  $n \times n$  矩阵.

**证明** 引理 9.5.9 表明, 如果  $\text{trace}A=0$ , 则对所有  $t$  有  $\det e^{tA} = e^{t \text{trace}A} = e^0 = 1$ . 所以,  $e^{tA}$  是  $SL_n$  里的单参数群. 反过来, 如果对所有  $t$  有  $\det e^{tA} = 1$ , 则  $e^{t \text{trace}A}$  的导数在  $t=0$  时为 0. 该导数是  $\text{trace}A$ . ■

$SL_2$  里的最简单的单参数群是例 9.5.6(a)里的群.  $SU_2$  里的单参数群是(9.3.9)中所描述的经.



## 第六节 李代数

矩阵群  $G$  在恒等元处的切向量空间叫做群的李代数. 记之为  $\text{Lie}(G)$ . 之所以称它为代数, 是因为它有合成法则, 下面定义括号的作用.

例如, 当我们将圆周群表示为复平面的单位圆时, 李代数是  $i$  的实数倍的空间.

导出切向量的定义是我们在微积分里所学的某些知识: 如果  $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_k(t))$  是  $\mathbf{R}^k$  里的可微路, 则速度向量  $v = \varphi'(0)$  是路在点  $x = \varphi(0)$  处的斜率. 称一个向量  $v$  与  $\mathbf{R}^k$  的子集  $S$  在点  $x$  相切, 如果存在可微路  $\varphi(t)$ , 使得  $\varphi(0) = x$  和  $\varphi'(0) = v$ , 这里的  $\varphi(t)$  要求对充分小的  $t$  有定义, 并完全在  $S$  里.

线性群  $G$  的元素是矩阵, 于是,  $G$  里的路  $\varphi(t)$  是矩阵值函数. 它的导数  $\varphi'(0)$  在  $t=0$  时自然表示为矩阵, 且如果  $\varphi(0) = I$ , 则矩阵  $\varphi'(0)$  将是  $\text{Lie}(G)$  的元素. 例如, 群  $SO_2$  的通常参数化(9.5.6)(b)表明矩阵  $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  属于  $\text{Lie}(SO_2)$ .

我们已经知道正交群  $O_n$  里的一些路: 单参数群  $\varphi(t) = e^{At}$ , 其中  $A$  是斜对称矩阵(9.5.8). 因为  $(e^{At})_{t=0} = I$  且  $\left(\frac{d}{dt}e^{At}\right)_{t=0} = A$ , 所以每个斜对称矩阵  $A$  是  $O_n$  在恒等元(它的李代数的元素)处的切向量. 我们现在证明李代数恰恰由这些矩阵组成. 因为单参数群很特殊, 所以这不是完全显然的. 存在许多其他的路.

**【9.6.1】命题** 正交群  $O_n$  的李代数由斜对称矩阵组成.

**证明** 用  $*$  记转置. 如果  $\varphi$  是  $O_n$  的路, 且  $\varphi(0) = I$ ,  $\varphi'(0) = A$ , 则  $\varphi(t)^* \varphi(t) = I$ , 从而  $\frac{d}{dt}(\varphi(t)^* \varphi(t)) = 0$ . 这样,

$$\frac{d}{dt}(\varphi^* \varphi)_{t=0} = \left(\frac{d\varphi^*}{dt}\varphi + \varphi^* \frac{d\varphi}{dt}\right)_{t=0} = A^* + A = 0 \quad \blacksquare$$

其次, 我们考虑特殊线性群  $SL_n$ .  $SL_n$  里的单参数群有形式  $\varphi(t) = e^{At}$ , 其中  $A$  是迹为 0 的矩阵(9.5.10). 因为  $(e^{At})_{t=0} = I$  且  $\left(\frac{d}{dt}e^{At}\right)_{t=0} = A$ , 所以每个迹为 0 的矩阵  $A$  是  $SL_n$  在恒等元——它的李代数的元素——处的切向量.

275

**【9.6.2】引理** 令  $\varphi$  是  $GL_n$  中的路, 且  $\varphi(0) = I$ ,  $\varphi'(0) = A$ , 则  $\left(\frac{d}{dt}(\det \varphi)\right)_{t=0} = \text{trace} A$ .

**证明** 把矩阵  $\varphi$  的元素写为  $\varphi_{ij}$ , 用行列式的完全展开式(1.6.4)计算  $\frac{d}{dt} \det \varphi$ :

$$\det \varphi = \sum_{p \in S_n} (\text{sign } p) \varphi_{1, p_1} \cdots \varphi_{n, p_n}$$

由乘法法则,

**【9.6.3】** 
$$\frac{d}{dt}(\varphi_{1, p_1} \cdots \varphi_{n, p_n}) = \sum_{i=1}^n \varphi_{1, p_1} \cdots \varphi'_{i, p_i} \cdots \varphi_{n, p_n}$$

我们计算  $t=0$  时的值. 因为  $\varphi(0)=I$ , 故如果  $i \neq j$ ,  $\varphi_{ij}(0)=0$ , 且  $\varphi_{ii}(0)=1$ . 所以, 在和 (9.6.3) 里, 项  $\varphi_{1,p_1} \cdots \varphi'_{i,p} \cdots \varphi_{n,p_n}$  的值为 0, 除非对所有  $j \neq i$  有  $p_j=j$ . 且如果对所有  $j \neq i$ , 有  $p_j=j$  则因为  $p$  是置换, 所以也有  $p_i=i$ , 所以,  $p$  是恒等元. 于是, (9.6.3) 等于 0 除非  $p=1$ , 而当  $p=1$  时, 它变为  $\sum_i \varphi'_{ii}(0) = \text{trace}A$ . 这是  $\det\varphi$  的导数. ■

**【9.6.4】命题** 特殊线性群  $SL_n$  的李代数由迹零矩阵构成.

**证明** 如果  $\varphi$  是特殊线性群的路, 且  $\varphi(0)=I$ ,  $\varphi'(0)=A$ , 则恒等地,  $\det(\varphi(t))=1$ . 所以,  $\frac{d}{dt}\det(\varphi(t))=0$ . 计算在  $t=0$  时的值, 我们得  $\text{trace}A=0$ . ■

类似的方法用于描述其他典型群的李代数. 注意  $O_n$  与  $SL_n$  的李代数是实向量空间, 它们都是矩阵空间的子空间. 容易证明对于其他群,  $\text{Lie}(G)$  是实向量空间.

## 李括号

李代数有加法结构, 是称为括号的运算, 合成法则由规则

$$\text{【9.6.5】} \quad [A, B] = AB - BA$$

定义括号是交换子: 它为零当且仅当  $A$  与  $B$  交换. 它不满足结合律, 但满足所谓的雅可比恒等式:

$$\text{【9.6.6】} \quad [A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$$

要证括号是定义在李代数上, 必须验证如果  $A$  与  $B$  属于  $\text{Lie}(G)$ , 则  $[A, B]$  也属于  $\text{Lie}(G)$ . 这对任一个特殊群都很容易证明. 对一个特定线性群, 所需的证明是, 如果  $A$  与  $B$  迹为 0, 则  $AB-BA$  迹为 0. 这是成立的, 因为  $\text{trace}AB = \text{trace}BA$ . 正交群的李代数是斜对称矩阵空间. 对于该群, 必须证明如果  $A$  与  $B$  是斜对称的, 则  $[A, B]$  是斜对称的:

$$[A, B]^t = (AB)^t - (BA)^t = B^t A^t - A^t B^t = (-B)(-A) - (-A)(-B) = -[A, B]$$

抽象李代数的定义包含了括号运算.

**【9.6.7】定义** 李代数  $V$  是实向量空间, 具有称为括号的合成法则  $V \times V \rightarrow V$ , 记为  $v, w \rightsquigarrow [v, w]$ , 满足公理: 对所有  $u, v, w \in V$  与所有  $c \in \mathbf{R}$ ,

$$\text{双线性性: } [v_1 + v_2, w] = [v_1, w] + [v_2, w], [cv, w] = c[v, w],$$

$$[v, w_1 + w_2] = [v, w_1] + [v, w_2], [v, cw] = c[v, w],$$

$$\text{斜对称性: } [v, w] = -[w, v] \quad \text{或} \quad [v, v] = 0,$$

$$\text{雅可比恒等式: } [u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0.$$

李代数是有益的, 因为它们是向量空间, 容易与线性群一起研究. 并且, 许多线性群 (包括典型群) 几乎都是由它们的李代数确定, 尽管这点不容易证明.

## 第七节 群的平移

令  $P$  是矩阵群  $G$  的一个元素. 由  $P$  确定的左乘是  $G$  到自身的双射:

【9.7.1】

$$G \xrightarrow{m_P} G$$

$$X \sim PX$$

它的逆函数为由  $P^{-1}$  确定的左乘. 映射  $m_P$  与  $m_{P^{-1}}$  是连续的, 这是因为矩阵乘法是连续的. 因此,  $m_P$  是从  $G$  到  $G$  的同胚(不一定是同态). 它也称为由  $P$  确定的左平移, 与平面的平移类似, 而平面的平移为加群  $\mathbf{R}^{2+}$  的左平移.

群的由这些映射的存在性蕴含的重要性质是齐性. 用  $P$  左乘是将恒等元  $I$  映到一个同胚. 直觉上, 群在  $P$  看上去与在  $I$  看上去一样. 因为  $P$  是任意的, 所以它在任意两点看上去是一样的. 这类似于平面上任两点看上去都是一样的事实.

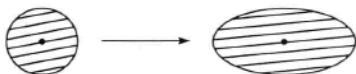
圆周群  $SO_2$  上的左乘旋转圆, 且  $SU_2$  的左乘也是 3-球面的刚性运动. 但齐性在其他矩阵群较弱. 例如, 令  $G$  是实可逆对角  $2 \times 2$  矩阵群. 如果我们把  $G$  的元素与平面上不在坐标轴上的点  $(a, d)$  等同起来, 则由矩阵

【9.7.2】

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

277 确定的乘法会使群变形, 但这种变形是连续的.

【9.7.3】图



一个群中的左乘

现在,  $\mathbf{R}^d$  中在几何上具有这样齐性的唯一合理的子集是流形. 一个  $d$  维流形  $M$  是一个集合, 该集合的每个点都有一个同胚于  $\mathbf{R}^d$  的开集的邻域(见[Munkres], p. 155). 典型群是流形并不使人感到意外, 虽然  $GL_n$  有不是流形的子群. 有理系数的可逆矩阵的群  $GL_n(\mathbf{Q})$  是一个有意思的群, 但它是矩阵空间的可数稠密子集.

下面的定理对哪些线性群是流形的问题给出了令人满意的回答.

【9.7.4】定理 如果  $GL_n$  的子群是它的闭子集, 则该子群是流形.

在这里给出这个定理的证明将把我们带离主题太远, 我们转而通过证明正交群  $O_n$  是流形来说明这个定理. 对其他典型群的证明是类似的.

【9.7.5】引理 矩阵指数  $A \sim e^A$  同胚地把  $\mathbf{R}^{n \times n}$  里 0 的小邻域  $U$  映为  $GL_n(\mathbf{R})$  里  $I$  的邻域  $V$ .

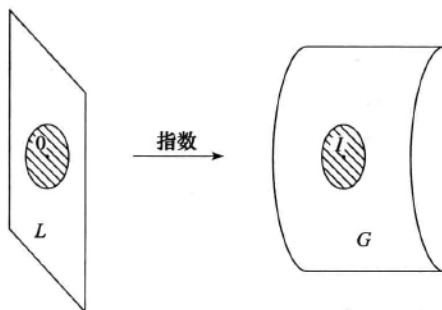
幂级数在矩阵的有界集合上一致收敛的事实蕴含着它是个连续函数([Rudin]定理 7.12) 要证这个引理, 需要证明对充分接近  $I$  的矩阵, 它有连续逆函数. 这可用逆函数定理及  $\log(1+x)$  的级数证明:

【9.7.6】

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \dots$$

级数  $\log(I+B)$  对小矩阵  $B$  收敛, 并且它是指数的逆.

## 【9.7.7】图



矩阵指数

278

【9.7.8】命题 正交群  $O_n$  是  $\frac{1}{2}n(n-1)$  维流形.

**证明** 用  $G$  记群  $O_n$ , 并把它的李代数(即斜对称矩阵空间)记为  $L$ . 如果  $A$  是斜对称的, 则  $e^A$  是正交的(9.5.8). 所以, 指数映  $L$  到  $G$ . 反之, 假设  $A$  接近 0, 则用  $*$  记转置,  $A^*$  与  $-A$  也接近 0, 且  $e^{A^*}$  与  $e^{-A}$  接近  $I$ . 如果  $e^A$  是正交的, 亦即, 如果  $e^{A^*} = e^{-A}$ , 则由引理 9.7.5 可知  $A^* = -A$ , 于是,  $A$  是斜对称的. 所以, 接近 0 的矩阵  $A$  属于  $L$  当且仅当  $e^A$  属于  $G$ . 这证明了指数定义了从  $L$  里 0 的邻域  $V$  到  $G$  里  $I$  的邻域  $U$  的一个同胚. 因为  $L$  是向量空间, 故它是流形. 正交群在恒等元处满足流形条件. 齐性蕴含着在所有点都满足条件. 所以,  $G$  是个流形, 并且它的维数与  $L$  的相同, 都为  $\frac{1}{2}n(n-1)$ . ■

下面是齐性原则的另一个应用.

【9.7.9】命题 令  $G$  是路连通矩阵群, 且设  $H \subset G$  是包含  $G$  的非空开子集  $U$  的子群, 则  $H=G$ .

**证明**  $\mathbf{R}^n$  的子集是路连通的, 如果  $S$  的任意两个点可由完全位于  $S$  里的连续路连接(见[Munkres, p. 155]或第二章练习 M. 6).

因为由元素  $g$  确定的左乘是从  $G$  到  $G$  的同胚, 故集合  $gU$  也是开的, 且它包含于  $H$  的单个陪集, 即  $gH$  里. 由于  $U$  的平移覆盖  $G$ , 故包含于陪集  $C$  里的平移覆盖陪集  $C$ . 所以, 每个陪集是  $G$  的开子集的并, 从而  $G$  本身也是开的. 这样,  $G$  划分成开子集, 即  $H$  的陪集. 路连通集合不是真开子集的不交并(见[Munkres, p. 155]). 因此, 只有一个陪集, 从而  $H=G$ . ■

我们用这个命题确定  $SU_2$  的正规子群.

## 【9.7.10】定理

(a)  $SU_2$  的真正子群只有其中心  $\{\pm I\}$ .

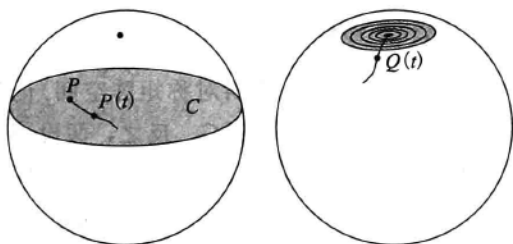
(b) 旋转群  $SO_3$  是单群.

**证明** (a) 令  $N$  是  $SU_2$  的包含元素  $P \neq \pm I$  的正规子群. 必须证明  $N$  等于  $SU_2$ . 因为  $N$  是正规的, 所以它包含  $P$  的共轭类  $C$ , 这是一个纬, 是一个 2-球面.

选取一个从单位区间 $[0, 1]$ 到 $C$ 的连续映射 $P(t)$ 使得 $P(0)=P$ 且 $P(1)\neq P$ , 且构成路 $Q(t)=P(t)P^{-1}$ . 这样,  $Q(0)=I$ , 且 $Q(1)\neq I$ , 所以, 这条路从恒等元 $I$ 开始, 如下图所示. 因为 $N$ 是一个包含 $P$ 和 $P(t)$ 的群, 故对每个 $t\in[0, 1]$ , 它也包含 $Q(t)$ . 我们不需要知道关于路 $Q(t)$ 的其他任何事情.

279

注意对任意 $Q\in SU_2$ , 有 $\text{trace}Q\leq 2$ , 且 $I$ 是迹等于2的唯一矩阵. 所以,  $\text{trace}Q(0)=2$ ,  $\text{trace}Q(1)=\tau<2$ . 由连续性,  $\tau$ 与2之间的所有值均为 $\text{trace}Q(t)$ 取到. 因为 $N$ 是正规的, 故对每个 $t$ , 它含有 $Q(t)$ 的共轭类. 所以,  $N$ 包含 $SU_2$ 的迹充分接近2的所有元素, 且包含所有接近恒等阵的矩阵. 于是,  $N$ 包含 $SU_2$ 中恒等元的开邻域. 因为 $SU_2$ 是路连通的, 故命题9.7.9表明 $N=SU_2$ .



(b) 存在满射 $\varphi: SU_2 \rightarrow SO_3$ , 其核为 $\{\pm I\}$ (9.4.1). 由对应定理2.10.5,  $SO_3$ 里正规子群的逆像是 $SU_2$ 的含有 $\{\pm I\}$ 的正规子群. (a)部分告诉我们 $SU_2$ 除了 $\{\pm I\}$ 外没有真子群, 因此,  $SO_3$ 不含有真的正规子群. ■

也可应用群 $G$ 的平移到切向量. 如果 $A$ 是恒等元处的切向量, 且如果 $P$ 是 $G$ 的元素, 则向量 $PA$ 在 $P$ 处相切于 $G$ . 如果 $A$ 不是0, 则 $PA$ 也不是0. 当 $P$ 遍历整个群时, 这些向量族构成所谓的切向量场. 现在, 仅是存在无处为零的切向量场这一点对空间 $G$ 就加上了很强的限制. 它是拓扑定理, 有时也叫“毛球定理”, 2-球面上任意切向量场必在某个点为零(见[Milnor]). 这就是为什么2-球面没有群结构的原因. 但作为群的3-球面具有无处为零的切向量场.

## 第八节 $SL_2$ 的正规子群

令 $F$ 是一个域. 群 $SL_2(F)$ 的中心是 $\{\pm I\}$ . (这是练习8.5.) 商群 $SL_2(F)/\{\pm I\}$ 称为射影群, 记之为 $PSL_2(F)$ . 它的元素是陪集 $\{\pm P\}$ .

**【9.8.1】定理** 令 $F$ 是阶至少为4的一个域.

- (a)  $SL_2(F)$ 的真正子群只有其中心 $Z=\{\pm I\}$ .
- (b) 射影群 $PSL_2(F)$ 是单群.

定理的(b)部分由(a)部分与对应定理2.10.5得到, 它确定了一个有意思的有限单群类: 当 $F$ 是有限域时的射影群 $PSL_2(F)$ . 我们见到的其他有限非阿贝尔单群是交错群(7.5.4).

我们将在第十五章证明有限域的阶永远是一个素数的幂, 对每个素数幂 $q=p^e$ , 存在

阶为  $q$  的域, 且  $\mathbf{F}_q$  有特征  $p$  (定理 15.7.3).  $2^n$  阶的有限域有特征 2. 在这些域里,  $1 = -1$  且  $I = -I$ . 这样,  $SL_2(\mathbf{F}_q)$  的中心是平凡群. 现在假设有这些事实.

280

我们略去下个引理的证明. (对于  $q$  是素数的情形, 见第三章或练习 4.4.)

**【9.8.2】引理** 令  $q$  是一个素数的幂, 则  $SL_2(\mathbf{F}_q)$  的阶是  $q^3 - q$ . 如果  $q$  不是 2 的幂, 则  $PSL_2(\mathbf{F}_q)$  的阶是  $\frac{1}{2}(q^3 - q)$ . 如果  $q$  是 2 的幂, 则  $PSL_2(\mathbf{F}_q) \approx SL_2(\mathbf{F}_q)$ , 且  $PSL_2(\mathbf{F}_q)$  的阶是  $q^3 - q$ .

对于小的  $q$ ,  $PSL_2$  的阶与前三个单交错群的阶列表如下:

$ F $	4	5	7	8	9	11	13	16	17	19
$ PSL_2 $	60	60	168	504	360	660	1092	4080	2448	3420
		$n$	5	6	7					
		$ A_n $	60	360	2520					

10 个最小非阿贝尔单群的阶出现在这个表里. 下一个最小的群将是  $PSL_3(\mathbf{F}_3)$ , 其阶为 5616.

当  $|F| = 2$  或 3 时, 射影群不是单群.  $PSL_2(\mathbf{F}_2)$  同构于对称群  $S_3$ , 而  $PSL_2(\mathbf{F}_3)$  同构于交错群  $A_4$ .

如这些表里所显示的,  $PSL_2(\mathbf{F}_4)$ ,  $PSL_2(\mathbf{F}_5)$  和  $A_5$  都有阶 60. 这三个群恰好是同构的. (这是练习 8.3.) 阶里其他的吻合是群  $PSL_2(\mathbf{F}_9)$  与  $A_6$ , 阶为 360. 它们也是同构的.

对于证明, 我们留下  $|F| = 4$  与 5 的情形, 以便能用下面的引理.

**【9.8.3】引理** 阶比 5 大的域  $F$  含有元素  $r$ , 其平方不是 0, 1 或  $-1$ .

**证明** 平方为 0 的元素是 0, 平方为 1 的元素是  $\pm 1$ . 至多有两个元素, 其平方是  $-1$ : 如果  $a^2 = b^2 = -1$ , 则  $(a-b)(a+b) = 0$ , 所以,  $b = \pm a$ . ■

**定理 9.8.1 的证明** 假设已知域  $F$ , 令  $SL_2$  与  $PSL_2$  分别代表  $SL_2(F)$  与  $PSL_2(F)$ , 用  $V$  记空间  $F^2$ . 选取  $F$  的非零元素  $r$ , 其平方  $s$  不是  $\pm 1$ .

令  $N$  是  $SL_2$  的包含元素  $A \neq \pm I$  的正规子群. 必须证明  $N$  是整个群  $SL_2$ . 因为  $A$  是任意的, 所以用它进行直接讨论比较困难. 策略是从证明  $N$  含有特征值为  $s$  的矩阵开始.

第一步:  $SL_2$  存在矩阵  $P$  使得交换子  $B = APA^{-1}P^{-1}$  属于  $N$ , 且有特征值  $s$  与  $s^{-1}$ .

这是一个很好的技巧. 在  $V$  中选取一个不为  $A$  的特征向量的向量  $v_1$ , 令  $v_2 = Av_1$ . 这样,  $v_1$  与  $v_2$  是无关的, 所以,  $\mathbf{B}(v_1, v_2)$  是  $V$  的基. (容易验证  $SL_2$  中每个向量都是特征向量的矩阵只有  $I$  与  $-I$ .)

设  $R$  是具有对角元  $r$  与  $r^{-1}$  的对角阵. 矩阵  $P = [\mathbf{B}]R[\mathbf{B}]^{-1}$  有行列式 1, 且  $v_1$  与  $v_2$  是分别伴随于特征值  $r$  与  $r^{-1}$  的特征向量 (4.6.10). 因为  $N$  是正规子群, 所以交换子  $B = APA^{-1}P^{-1}$  是  $N$  的元素 (见 (7.5.4)). 这样,

281

$$Bv_2 = APA^{-1}P^{-1}v_2 = APA^{-1}(rv_2) = rAPv_1 = r^2Av_1 = sv_2$$

所以,  $s$  是  $B$  的特征值. 因为  $\det B = 1$ , 所以另一个特征值为  $s^{-1}$ .

第二步: 具有特征值  $s$  与  $s^{-1}$  的矩阵构成  $SL_2$  里单个共轭类  $C$ , 且这个共轭类包含在  $N$  里.

元素  $s$  与  $s^{-1}$  是不同的, 因为  $s \neq \pm 1$ . 令  $S$  是具有对角元  $s$  与  $s^{-1}$  的对角矩阵. 具有特征值  $s$  与  $s^{-1}$  的每个矩阵  $Q$  在  $GL_2(F)$  里是  $S$  的共轭(4.4.8)(b), 比如说  $Q = LSL^{-1}$ . 因为  $S$  是对角的, 故它与任何其他对角矩阵交换. 在右边用适当的对角矩阵乘  $L$ , 使得  $\det L = 1$  而保持方程  $Q = LSL^{-1}$ . 所以,  $Q$  是  $S$  在  $SL_2$  里的共轭类. 这表明具有特征值  $s$  与  $s^{-1}$  的矩阵构成单个共轭类. 由第一步, 正规子群  $N$  包含一个这样的矩阵. 于是,  $C \subset N$ .

第三步: 初等矩阵  $E = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  与  $E' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{bmatrix}$  属于  $N$ , 其中  $x \in F$ .

对  $F$  的任意元素, 方程左边的项

$$\begin{bmatrix} s^{-1} & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & sx \\ 0 & s^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E$$

属于  $C$ , 从而属于  $N$ , 所以  $E$  属于  $N$ . 类似地, 可得到  $E'$  属于  $N$ .

第四步: 矩阵  $E$  与  $E'$  生成  $SL_2$ , 其中  $x \in F$ . 所以,  $N = SL_2$ .

这是第二章练习 4.8 的证明. ■

如交错群与射影群所表明的, 单群常常出现, 而这是深入研究它们的原因之一. 另一方面, 单性是对群的一个很强的限制. 它们不能太多, 嘉当的一个著名定理就是阐述这一点的.

复代数群是一般复线性群  $GL_n(\mathbb{C})$  的子群, 它是有限多个矩阵元素的复多项式方程组的解的轨迹. 嘉当定理列出了复单代数群. 在定理的叙述里, 用符号  $Z$  表示群的中心.

#### [9.8.4] 定理

(a) 群  $SL_n(\mathbb{C})$ ,  $SO_n(\mathbb{C})$  与  $SP_{2n}(\mathbb{C})$  的中心是有限循环群.

(b) 对  $n \geq 1$ , 群  $SL_n(\mathbb{C})/Z$ ,  $SO_n(\mathbb{C})/Z$  与  $SP_{2n}(\mathbb{C})/Z$  是路连通的复代数群. 除了  $SO_2(\mathbb{C})/Z$  与  $SO_4(\mathbb{C})/Z$  外, 它们是单的.

(c) 除这些群的同构类之外, 恰有五个单路连通复代数群的同构类, 称为例外群.

定理 9.8.4 是基于对应的李代数的分类的. 它在这里太难以致无法给出证明.

作为一项大工程的有限单群的分类于 1980 年完成. 我们看到的有限单群是素数阶的群(交错群  $A_n$ , 其中  $n \geq 5$ )与当  $F$  是阶至少为 4 的有限域时的群  $PSL_2(F)$ . 矩阵群在有限群分类中起着至关重要的作用. 当有限域替换复数域时, 每一种形式(9.8.4)都导致一个完整系列的有限单群. 还存在一些类似于酉群的有限单群. 所有这些有限的线性群称为是李型的. 除了素数阶群、交错群、李型群外, 还有 26 个有限单群称为离散群. 最小的离散群是马修群  $M_{11}$ , 其阶为 7920. 最大离散单群是大魔群, 其阶大致为  $10^{53}$ .

簇拥在成功的理论周围而将其失败

扣除门外是不公平的.

——Richard Brauer

## 练 习

### 第一节 典型群

- 1.1 (a)  $GL_n(\mathbf{C})$  同构于  $GL_{2n}(\mathbf{R})$  的一个子群吗?  
(b)  $SO_2(\mathbf{C})$  是  $\mathbf{C}^{2 \times 2}$  的有界子集吗?
- 1.2 矩阵  $P$  是正交的当且仅当它的列构成标准正交基. 在洛伦兹群里描述矩阵的列的性质.
- 1.3 证明从正交群  $O_4$  到洛伦兹群  $O_{3,1}$  不存在连续同构.
- 1.4 用方程描述群  $O_{1,1}$ , 并证明它有 4 个路连通分支.
- 1.5 证明  $SP_2 = SL_2$ , 但  $SP_4 \neq SL_4$ .
- 1.6 证明下列矩阵是辛矩阵, 如果块是  $n \times n$ :

$$\begin{bmatrix} & -I \\ I & \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A^1 & \\ & A^{-1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} I & B \\ & I \end{bmatrix}, \text{ 其中 } B=B^1, A \text{ 是可逆的.}$$

- 1.7 证明
  - (a) 辛群  $SP_{2n}$  可迁地作用在  $\mathbf{R}^{2n}$  上.
  - (b)  $SP_{2n}$  是路连通的.
  - (c) 辛矩阵的行列式为 1.

283

### 第二节 插曲: 球面

- 2.1 计算球极平面射影  $\pi: \mathbf{S}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  的逆的公式.
- 2.2 通过圆以两种方法参数化  $\mathbf{R}^2$  的真子空间. 首先, 如果子空间  $W$  与水平轴相交, 交角为  $\theta$ , 可用双倍角  $\alpha=2\theta$ . 双倍角消去了  $\theta$  与  $\theta+\pi$  之间的歧义. 或者, 可在  $W$  里选取一个非零向量  $(y_1, y_2)$ , 用球极平面射影的逆把斜率  $\lambda=y_2/y_1$  映为  $\mathbf{S}^1$  的一个点. 计算这两个参数化.
- 2.3 ( $\mathbf{C}^2$  里的单位向量与子空间) 向量空间  $\mathbf{C}^2$  的真子空间  $W$  有维数 1. 它的斜率定义为  $\lambda=y_2/y_1$ , 其中  $(y_1, y_2)$  是  $W$  里的非零向量. 斜率可以是任一个复数, 或者, 当  $y_1=0$  时,  $\lambda=\infty$ .
  - (a) 令  $z=v_1+v_2i$ . 写出球极平面射影公式  $\pi(9.2.2)$  并用  $z$  表出它的逆函数  $\sigma$ .
  - (b) 映单位向量  $(y_1, y_2)$  到  $\sigma(y_2/y_1)$  的函数定义了从  $\mathbf{C}^2$  中的单位球面  $\mathbf{S}^3$  到 2-球面  $\mathbf{S}^2$  的映射. 这个映射可用来参数化由  $\mathbf{S}^2$  的点构成的子空间. 计算单位向量  $(y_1, y_2)$  上的函数  $\sigma(y_2/y_1)$ .
  - (c)  $\mathbf{S}^2$  的什么点对对应关于  $\mathbf{C}^2$  上标准埃尔米特型正交的子空间  $W$  与  $W'$  的偶对?

### 第三节 特殊酉群 $SU_2$

- 3.1 令  $P$  与  $Q$  是  $SU_2$  的元素, 分别由实向量  $(x_0, x_1, x_2, x_3)$  与  $(y_0, y_1, y_2, y_3)$  表示. 计算对应于积  $PQ$  的实向量.
- 3.2 证明  $U_2$  同胚于积  $\mathbf{S}^3 \times \mathbf{S}^1$ .
- 3.3 证明  $SU_2$  里每个大圆(半径为 1 的圆)是一个经的陪集.
- 3.4 确定  $SU_2$  里  $j$  的中心化子.

### 第四节 旋转群 $SO_3$

- 4.1 令  $W$  是实对称  $3 \times 3$  矩阵的空间. 描述  $SO_3$  在  $W$  上作用  $P * A = PAP^1$  的轨道.
- 4.2 旋转群  $SO_3$  通过旋转变矩阵到它的第一列的映射映到一个 2-球面. 描述这个映射的纤维.
- 4.3 扩展正交表示  $\varphi: SU_2 \rightarrow SO_3$  到一个同态  $\Phi: U_2 \rightarrow SO_3$ , 并描述  $\Phi$  的核.



- 4.4 (a) 借助(9.4.1)中的记号, 计算旋转  $\gamma_P$  的矩阵, 并证明它的迹是  $1+2\cos 2\theta$ .  
 (b) 直接证明矩阵是正交的.
- 4.5 证明由  $SU_2$  的元素确定的共轭旋转每个纬.
- 4.6 用两种方法描述  $SO_3$  里的共轭类:  
 (a) 它的元素作为旋转作用于  $\mathbf{R}^3$  上. 哪些旋转组成共轭类?  
 (b) 用自旋同态  $SU_2 \rightarrow SO_3$  来联系两个群里的共轭类.  
 (c)  $SU_2$  里的共轭类是球面. 用几何方法描述  $SO_3$  里共轭类.
- 4.7 (a) 用坐标向量  $(x_0, x_1, x_2, x_3)$  具体计算  $SU_2$  里固定矩阵  $P$  不动的左乘. 证明它是由  $4 \times 4$  正交矩阵  $Q$  给出的乘法.  
 (b) 用类似于刻画正交表示时用过的方法证明  $Q$  是正交的: 以矩阵形式表示向量  $(x_0, x_1, x_2, x_3)$  (对应于  $SO_2$  中的矩阵  $P$ ) 与  $(x'_0, x'_1, x'_2, x'_3)$  (对应于  $SO_2$  中的矩阵  $P'$ ) 的点积.
- 4.8 令  $W$  是  $2 \times 2$  埃尔米特矩阵的实向量空间.  
 (a) 证明规则  $P \cdot A = PAP^*$  定义了  $SL_2(\mathbf{C})$  在  $W$  上的作用.  
 (b) 证明函数  $\langle A, A' \rangle = \det(A+A') - \det A - \det A'$  是  $W$  上的双线性型, 且它的符号差为  $(3, 1)$ .
- 4.9 (a) 令  $H_i$  是  $SO_3$  的绕  $x_i$  轴旋转的子群,  $i=1, 2, 3$ . 证明  $SO_3$  的每个元素可写为乘积  $ABA'$ , 其中  $A$  与  $A'$  属于  $H_1$  而  $B$  属于  $H_2$ . 证明这个表示是唯一的, 除非  $B=I$ .  
 (b) 用几何方法描述双陪集  $H_1 Q H_1$  (见第二章练习 M.9).

### 第五节 单参数群

- 5.1  $GL_n(\mathbf{R})$  的单参数群的像能穿过自己吗?
- 5.2 确定  $U_2$  里的单参数群.
- 5.3 用方程描述实可逆  $2 \times 2$  对角矩阵群里单参数群的像, 在平面上画草图展示它们当中的一些元素.
- 5.4 寻找矩阵  $A$  上的条件使得  $e^{tA}$  是下面群里的单参数群:  
 (a) 特殊酉群  $SU_n$ . (b) 洛伦兹群  $O_{3,1}$
- 5.5 令  $G$  是形如  $\begin{bmatrix} x & y \\ & 1 \end{bmatrix}$  的实矩阵的群, 其中  $x > 0$ .  
 (a) 确定矩阵  $A$  使得  $e^{tA}$  是  $G$  里的单参数群.  
 (b) 对(a)中的矩阵  $A$  具体计算  $e^{tA}$ .  
 (c) 在  $(x, y)$  平面中图示说明某个单参数群.
- 5.6 令  $G$  是  $GL_2$  的矩阵  $\begin{bmatrix} x & y \\ & x^{-1} \end{bmatrix}$  的子群, 其中  $x > 0$ ,  $y$  是任意的. 确定  $G$  中的共轭类及矩阵  $A$  使得  $e^{tA}$  是  $G$  里的单参数群.
- 5.7 确定  $n \times n$  可逆上三角矩阵群里的单参数群.
- 5.8 令  $\varphi(t) = e^{tA}$  是  $GL_n$  的子群  $G$  里的单参数群. 证明它的像的陪集是微分方程  $dX/dt = AX$  的矩阵解.
- 5.9 令  $\varphi: \mathbf{R}^+ \rightarrow GL_n$  是一个单参数群. 证明  $\ker \varphi$  或是平凡的, 或是无限循环群, 或是整个群.
- 5.10 确定从圆周群  $SO_2$  到  $GL_n$  的可微同态.

### 第六节 李代数

- 6.1 对于括号运算  $[A, B] = AB - BA$  证明雅可比恒等式.
- 6.2 令  $V$  是 2 维实向量空间, 带有的合成规则  $[v, w]$  为双线性与斜对称的 (见(9.6.7)). 证明雅可比恒

等式成立.

- 6.3 群  $SL_2$  共轭作用在迹零矩阵空间上. 把这个空间分解成轨道.
- 6.4 令  $G$  是形如  $\begin{bmatrix} a & b \\ & a^2 \end{bmatrix}$  的可逆实矩阵群. 确定  $G$  的李代数  $L$ , 计算  $L$  上的括号.
- 6.5 证明由  $xy=1$  定义的集合是可逆对角  $2 \times 2$  矩阵群的子群, 并计算它的李代数.
- 6.6 (a) 证明  $O_2$  共轭作用在它的李代数上.  
 (b) 证明这个作用与双线性型  $\langle A, B \rangle = \frac{1}{2} \text{trace} AB$  相容.  
 (c) 用这个作用定义同态  $O_2 \rightarrow O_2$ , 并具体地描述这个同态.
- 6.7 确定下列群的李代数.  
 (a)  $U_n$  (b)  $SU_n$  (c)  $O_{3,1}$  (d)  $SO_n(\mathbb{C})$
- 6.8 用分块矩阵形式  $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$  确定  $SP_{2n}$  的李代数.
- 6.9 (a) 证明向量叉积使  $\mathbf{R}^3$  成为李代数  $L_1$ .  
 (b) 令  $L_2 = \text{Lie}(SU_2)$ , 且设  $L_3 = \text{Lie}(SO_3)$ . 证明三个李代数  $L_1, L_2$  与  $L_3$  是同构的.
- 6.10 对维数  $\leq 3$  的复李代数进行分类.
- 6.11 令  $B$  是一个实  $n \times n$  矩阵, 且设  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  是双线性型  $X^T B Y$ . 这个型的正交群  $G$  定义为使得  $P^T B P = B$  的矩阵  $P$  的群. 确定  $G$  里的单参数群和  $G$  的李代数.

## 第七节 群的平移

- 7.1 证明酉群  $U_n$  是路连通的.
- 7.2 确定下列群的维数:  
 (a)  $U_n$  (b)  $SU_n$  (c)  $SO_n(\mathbb{C})$  (d)  $O_{3,1}$  (e)  $SP_{2n}$
- 7.3 用指数求方程  $P^2 = I$  的所有接近  $I$  的解.
- 7.4 求  $GL_2$  的 2 维路连通非阿贝尔子群.
- 7.5 (a) 证明指数映射定义了所有埃尔米特矩阵的集合与正定埃尔米特矩阵的集合之间的双射.  
 (b) 用极分解(第八章, 练习 M. 8)和(a)描述  $GL_2(\mathbb{C})$  的拓扑结构.
- 7.6 概述群  $\mathbb{C}^\times$  的切向量场  $PA$ , 其中  $A = 1 + i$ .
- 7.7 令  $H$  是路连通群  $G$  的有限正规子群. 证明  $H$  包含于  $G$  的中心.

## 第八节 $SL_2$ 的正规子群

- 8.1 对情形  $F = F_1$  与  $F_3$  证明定理 9.8.1.
- 8.2 描述同构  $PSL_2(\mathbb{F}_2) \approx S_3$  与  $PSL_2(\mathbb{F}_3) \approx A_4$ .
- 8.3 (a) 确定  $PSL_2(\mathbb{F}_5)$  的西罗  $p$ -子群的个数,  $p=2, 3, 5$ .  
 (b) 证明三个群  $A_5, PSL_2(\mathbb{F}_4)$  和  $PSL_2(\mathbb{F}_5)$  是同构的.
- 8.4 (a) 写出定义辛群的多项式方程.  
 (b) 证明酉群  $U_n$  可由其矩阵元素的实部与虚部的实多项式方程定义.
- 8.5 确定群  $SL_n(\mathbf{R})$  与  $SL_n(\mathbb{C})$  的中心.
- 8.6 确定  $GL_2(\mathbf{R})$  的包含它的中心的所有正规子群.

- 8.7 用  $Z$  表示一个群的中心,  $PSL_n(\mathbf{C})$  同构于  $GL_n(\mathbf{C})/Z$  吗?  $PSL_n(\mathbf{R})$  同构于  $GL_n(\mathbf{R})/Z$  吗?
- 8.8 (a) 令  $P$  是  $SO_n$  的中心里的矩阵, 且设  $A$  是斜对称矩阵. 证明  $PA=AP$ .  
 (b) 证明  $SO_n$  的中心是平凡的, 如果  $n$  为奇数; 是  $\{\pm I\}$ , 如果  $n$  为偶数且  $n \geq 4$ .
- 8.9 计算群的阶:  
 (a)  $SO_2(\mathbf{F}_3)$  (b)  $SO_3(\mathbf{F}_3)$  (c)  $SO_2(\mathbf{F}_5)$  (d)  $SO_3(\mathbf{F}_5)$
- \*8.10 (a) 令  $V$  是  $2 \times 2$  复矩阵空间, 具有基  $(e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22})$ . 在  $V$  上以分块矩阵形式写出由  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  给出的共轭的矩阵.  
 (b) 证明共轭定义同态  $\varphi: SL_2(\mathbf{C}) \rightarrow GL_4(\mathbf{C})$ , 且  $\varphi$  的像同构于  $PSL_2(\mathbf{C})$ .  
 (c) 通过求  $4 \times 4$  矩阵的元素  $y_{ij}$  的多项式方程使其解正好是  $\text{im} \varphi$  中的矩阵来证明  $PSL_2(\mathbf{C})$  是复代数群.

### 杂题

- M.1 令  $G = SL_2(\mathbf{R})$ , 设  $A = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$  是  $G$  中的矩阵, 设  $t$  是它的迹. 用  $t-x$  替换  $w$ , 条件  $\det A = 1$  变为  $x(t-x) - yz = 1$ . 对固定不动的迹  $t$ , 这个方程解的轨迹是  $x, y, z$  空间的二次曲面. 刻画以这种方式产生的曲面, 并把它们分解成共轭类.
- \*M.2  $SL_2(\mathbf{R})$  的哪个元素位于单参数群上?
- 287 M.3 路连通群  $G$  中的共轭类是路连通的吗?
- M.4 四元数是形如  $\alpha = a + bi + cj + dk$  的表达式, 其中  $a, b, c, d$  是实数(见(9.3.3)).  
 (a) 令  $\bar{\alpha} = a - bi - cj - dk$ . 计算  $\bar{\alpha}\alpha$ .  
 (b) 证明每个  $\alpha \neq 0$  有一个乘法逆.  
 (c) 证明使得  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$  的四元数  $\alpha$  的集合在乘法下构成一个与  $SU_2$  同构的群.
- M.5 仿射群是  $A_n$  是由  $GL_n$  与平移  $t_a(x) = x + a$  的群  $T_n$  生成的  $\mathbf{R}^n$  的变换群, 证明  $T_n$  是  $A_n$  的正规子群且  $A_n/T_n$  同构于  $GL_n$ .
- M.6 (凯莱变换) 设  $U$  表示使得  $I+A$  为可逆的矩阵  $A$  的集合, 并定义  $A' = (I-A)(I+A)^{-1}$ .  
 (a) 证明: 如果  $A$  属于  $U$ , 则  $A'$  也属于  $U$ , 且  $(A')' = A$ .  
 (b) 设  $V$  表示由实斜对称  $n \times n$  矩阵组成的向量空间. 证明法则  $A \rightsquigarrow (I-A)(I+A)^{-1}$  定义了  $V$  中  $0$  的一个邻域到  $SO_n$  中  $I$  的一个邻域的一个同胚.  
 (c) 对于酉群有类似的结论吗?  
 (d) 设  $S = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}$ . 证明  $U$  中的矩阵  $A$  是辛的当且仅当  $(A')'S = -SA'$ .
- M.7 设  $G = SL_2$ .  $\mathbf{R}^2$  中的一条射线是从原点到无穷远点的半直线. 射线与  $\mathbf{R}^2$  中单位 1-球面上的点一一对应.  
 (a) 确定射线  $\{re_1 \mid r \geq 0\}$  的稳定化子  $H$ .  
 (b) 证明由  $f(P, B) = PB$  定义的映射  $f: H \times SO_2 \rightarrow G$  是一个同胚(不是一个同态).  
 (c) 用(b)确定  $SL_2$  的拓扑结构.
- M.8 2维时空是3维实列向量空间, 带有洛伦兹型  $\langle Y, Y' \rangle = Y^1 I_{2,1} Y'^1 = y_1 y'_1 + y_2 y'_2 - y_3 y'_3$ . 实的迹零的  $2 \times 2$  矩阵空间  $W$  有基  $B = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ , 其中

$$\omega_1 = \begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix}, \quad \omega_2 = \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix}, \quad \omega_3 = \begin{bmatrix} & 1 \\ -1 & \end{bmatrix}$$

(a) 证明: 如果  $A = \mathbf{B}Y$  与  $A' = \mathbf{B}Y'$  是迹零矩阵, 则洛伦兹型适用于  $\langle A, A' \rangle = y_1 y_1' + y_2 y_2' - y_3 y_3' = \frac{1}{2} \text{trace}(AA')$ .

(b) 群  $SL_2$  通过共轭作用到空间  $W$  上. 用这个作用定义同态  $\varphi: SL_2 \rightarrow O_{2,1}$ , 其核是  $\{\pm I\}$ .

(c) 证明洛伦兹群  $O_{2,1}$  有 4 个连通分支, 且  $\varphi$  的像是包含恒等元的分支.

M. 9 二十面体群是十二面体的所有对称(包括逆向对称)的群  $G_1$  里指标为 2 的子群. 交错群  $A_5$  是对称群  $G_2 = S_5$  的指标为 2 的子群. 最后, 考虑自旋同态  $\varphi: SU_2 \rightarrow SO_3$ . 令  $G_3$  为二十面体群在  $SU_2$  里的逆像. 群  $G_i$  中哪些是同构的?

288

M. 10 令  $P$  是  $SU_2$  里的矩阵(9.3.1), 且设  $T$  表示  $SU_2$  里的对角矩阵的子群. 证明: 如果  $P$  的元素  $a, b$  不为零, 则双倍集  $TPT$  同胚于环面, 并描述余下的双倍集(见第二章, 练习 M. 9).

M. 11 线性群  $G$  的伴随表示是它的李代数上的共轭表示: 由  $P, A \rightsquigarrow PAP^{-1}$  定义的映射  $G \times L \rightarrow L$ .  $L$  上的型  $\langle A, A' \rangle = \text{trace}(AA')$  称为基灵型. 对下列群, 证明如果  $P$  属于  $G$ ,  $A$  属于  $L$ , 则  $PAP^{-1}$  属于  $L$ . 证明基灵型是对称双线性型, 并且作用与型相容, 即  $\langle A, A' \rangle = \langle PAP^{-1}, PA'P^{-1} \rangle$ .

(a)  $SU_n$  (b)  $O_{3,1}$  (c)  $SO_n(\mathbb{C})$  (d)  $SP_{2n}$

M. 12 确定如下李代数上基灵型的符号差(练习 M. 11):

(a)  $SU_n$  (b)  $SO_n$  (c)  $SL_n$

M. 13 用  $SL_2(\mathbb{C})$  的伴随表示(练习 M. 11)定义同构  $SL_2(\mathbb{C})/\{\pm I\} \approx SO_3(\mathbb{C})$ .

289

## 第十章 群表示

在一个多世纪里数学家花费了巨大的努力来消除群论中的混乱，  
然而我们仍不能回答一些最简单的问题。

—Richard Brauer

当研究带有对称的结构时，数学与其他科学就产生了群表示。如果对某个物品（化学里也可能是分子振动）做所有可能的测量，并收集结果成“状态向量”，则分子的对称将变换那个向量。这就产生了对称群在向量空间上的作用，即能够帮助分析结构的群表示。

### 第一节 定 义

在本章里， $GL_n$  表示一般复线性群  $GL_n(\mathbb{C})$ 。

群  $G$  的矩阵表示是从  $G$  到一个一般复线性群的同态

**【10. 1. 1】** 
$$R: G \rightarrow GL_n$$

数字  $n$  是表示的维数。

我们用记号  $R_g$  而不是  $R(g)$  表示群元素  $g$  的像。每个  $R_g$  是个可逆矩阵， $R$  是同态的叙述读作

**【10. 1. 2】** 
$$R_{gh} = R_g R_h$$

如果一个群由生成元和关系给出，比如说， $\langle x_1, \dots, x_n | r_1, \dots, r_k \rangle$ ，则矩阵表示可通过指派满足关系的矩阵  $R_{x_1}, \dots, R_{x_n}$  定义。例如，对称群  $S_3$  可表示为  $\langle x, y | x^3, y^2, xyxy \rangle$ ，所以， $S_3$  的一个表示由使得  $R_x^3 = I$ ， $R_y^2 = I$  与  $R_x R_y R_x R_y = I$  的矩阵  $R_x$  与  $R_y$  定义。除这些所需关系之外，还有一些关系也成立。

因为  $S_3$  同构于二面体群  $D_3$ ，所以它有一个 2 维矩阵表示，记为  $A$ 。我们以原点为中心放置一个等边三角形，使得它的一个顶点在  $e_1$  轴。这样，它的对称群将由转过角度  $2\pi/3$  的旋转  $A_x$  与关于  $e_1$  轴的反射  $A_y$  生成。设  $c = \cos 2\pi/3$ ， $s = \sin 2\pi/3$ ，

**【10. 1. 3】** 
$$A_x = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix}, \quad A_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

我们将其称为二面体群  $D_3$  与  $S_3$  的标准表示。

注 表示  $R$  是忠实的，如果同态  $R: G \rightarrow GL_n$  是单的。所以同构地映  $G$  到它的像（即  $GL_n$  的子群）。 $S_3$  的标准表示是忠实的。

$S_3$  的第二个表示是 1 维符号表示  $\Sigma$ 。它在群元素上的值是  $1 \times 1$  矩阵，其元素是置换的符号：

**【10. 1. 4】** 
$$\Sigma_x = [1], \quad \Sigma_y = [-1]$$

这不是忠实表示。

最后, 每个群都有平凡表示, 是取值恒为 1 的 1 维表示:

$$\text{【10.1.5】} \quad T_x = [1], \quad T_y = [1]$$

存在  $S_3$  的其他表示, 包括置换矩阵表示和  $\mathbf{R}^3$  的旋转群表示. 但我们将看到, 这个群的每个表示可由三个表示  $A$ ,  $\Sigma$  与  $T$  构造出来.

因为它们涉及几个矩阵, 其中每个矩阵有许多元素, 故表示在符号上是复杂的. 理解它们的秘诀是扔掉矩阵含有的绝大部分信息, 仅保留一个必要部分, 即保留它的迹或特征标.

注 矩阵表示  $R$  的特征标  $\chi_R$  是其定义域为群  $G$  的复值函数, 由  $\chi_R(g) = \text{trace}R_g$  定义.

特征标通常记为  $\chi$  (希腊字母“chi”). 已定义的对称群的三个表示的特征标展示在下面的表里, 群元素以通常顺序列出.

【10.1.6】

	1	$x$	$x^2$	$y$	$xy$	$x^2y$
$\chi_T$	1	1	1	1	1	1
$\chi_\Sigma$	1	1	1	-1	-1	-1
$\chi_A$	2	-1	-1	0	0	0

在这个表里可观察到几个有趣的现象:

- 行构成长度为 6 的正交向量,  $S_3$  的阶也是 6. 列也是正交的.

这些令人惊讶的事实阐明了关于特征标的漂亮的主要定理 10.4.6.

291

两个其他现象是更基本的:

- $\chi_R(1)$  是表示的维数, 也叫特征标的维数.

因为表示是同态, 故它把群里的恒等元映为恒等矩阵. 所以,  $\chi_R(1)$  是恒等矩阵的迹.

- 特征标在共轭类上为常数.

( $S_3$  里的共轭类是集合  $\{1\}$ ,  $\{x, x^2\}$  与  $\{y, xy, x^2y\}$ .)

这个现象解释如下: 令  $g$  与  $g'$  是群  $G$  的共轭类, 比如说  $g' = hgh^{-1}$ . 因为表示  $R$  是同态, 故  $R_{g'} = R_h R_g R_h^{-1}$ . 所以,  $R_{g'}$  与  $R_g$  是共轭矩阵. 共轭矩阵有相同的迹.

当研究表示时, 本质上尽可能不用固定的基, 为此, 我们引入群在一个有限维向量空间  $V$  上的表示的概念. 用

$$\text{【10.1.7】} \quad GL(V)$$

记  $V$  上可逆线性变换群, 合成法则是算子合成. 总假设  $V$  是有限维复向量空间, 且不是零空间.

注 群  $G$  在复向量空间  $V$  上的表示为同态

$$\text{【10.1.8】} \quad \rho: G \rightarrow GL(V)$$

于是, 表示给每个群元素指派一个线性算子. 矩阵表示可看成  $G$  在列向量空间上的表示.

有限旋转群(6.12)的元素是 3 维欧几里得空间  $V$  的没有涉及基的旋转, 且这些正交算

子给出所谓的群的标准表示. (我们使用这个术语, 尽管对于  $D_3$ , 它与(10.1.3)冲突.) 对于其他表示也用符号  $\rho$ , 这并不蕴含算子  $\rho_g$  是旋转.

如果  $\rho$  是一个表示, 为保留符号  $g$  而不碍事, 我们用  $\rho_g$  而不是  $\rho(g)$  来记  $GL(V)$  中元素  $g$  的像. 应用  $\rho_g$  到向量  $v$  的结果写为

$$\rho_g(v) \quad \text{或} \quad \rho_g v$$

由于  $\rho$  是一个同态, 故

**【10.1.9】**

$$\rho_{gh} = \rho_g \rho_h$$

$V$  的基  $B = (v_1, \dots, v_n)$  的选择定义了从  $GL(V)$  到一般线性群  $GL_n$  的同构:

**【10.1.10】**

$$GL(V) \rightarrow GL_n$$

$$T \rightsquigarrow T \text{ 的矩阵}$$

且表示  $\rho$  通过规则

292

**【10.1.11】**

$$\rho_g \rightsquigarrow \text{它的矩阵} = R_g$$

定义了矩阵表示  $R$ . 这样, 如果我们想选择一个基, 则有限维向量空间上  $G$  的每个表示可成为一个矩阵表示. 为了作具体计算我们会选择一个基, 但必须确定哪些性质与基无关, 哪个基要好一些.

$V$  的由矩阵  $P$  给出的基变换将伴随于  $\rho$  的矩阵表示  $R$  变为共轭表示  $R' = P^{-1}RP$ , 亦即

**【10.1.12】**

$$R'_g = P^{-1}R_g P$$

其中对  $G$  的每个  $g$ ,  $P$  是相同的. 这由基的变换规则 4.3.5 得到.

**注** 群  $G$  的由线性算子在向量空间  $V$  上的作用是基础集上的作用:

**【10.1.13】**

$$1v = v, \quad (gh)v = g(hv)$$

此外, 每个群元素作为线性算子作用. 写出来就得到了规则

**【10.1.14】**

$$g(v + v') = gv + gv' \quad \text{与} \quad g(cv) = cvg$$

这两个规则加上(10.1.13)就给出了这个作用的全部公理. 我们也可像前面一样考虑其轨道和稳定子.

“线性算子在  $V$  上的作用”与“ $V$  上的表示”这两个概念是等价的. 给定  $G$  在  $V$  上的一个表示  $\rho$ , 我们可用

**【10.1.15】**

$$gv = \rho_g(v)$$

定义  $G$  在  $V$  上的一个作用. 反过来, 给定一个作用, 同样的公式可用来定义算子  $\rho_g$ .

这样对  $g$  在  $v$  上的作用有两个记号(10.1.15), 我们将交替使用它们, 记号  $gv$  更为紧凑, 我们会尽可能地使用它, 尽管意思模糊, 因为没有对特别指定  $\rho$ .

**注** 从群  $G$  的一个表示  $\rho: G \rightarrow GL(V)$  到另一个表示  $\rho': G \rightarrow GL(V')$  是向量空间的同构  $T: V \rightarrow V'$ , 它是一个可逆线性变换, 与  $G$  的作用相容:

**【10.1.16】**

$$T(gv) = gT(v)$$

对所有  $v \in V$  与所有  $g \in G$  成立. 如果  $T: V \rightarrow V'$  是同构, 且如果  $B$  与  $B'$  是  $V$  与  $V'$  对应的基, 则伴随矩阵表示  $R_g$  与  $R'_g$  是相等的.

本章的主题是确定群  $G$  的复表示——有限维非零复向量空间上的表示——的同构类。任一个实矩阵表示，诸如上面描述的  $S_3$  的表示，都可用来定义复表示，简单地把实矩阵解释为复矩阵就行了。我们将这样做而不做更多的解释。在最后一节，我们的群是有限的。

293

## 第二节 既约表示

令  $\rho$  是有限群  $G$  在(非零, 有限维)复向量空间  $V$  上的表示。一个向量  $v$  是  $G$ -不变的, 如果每个群元素的作用固定这个向量不动:

**【10.2.1】**  $gv = v$  或  $\rho_g(v) = v$ , 对所有  $g \in G$

大部分向量不是  $G$ -不变的。然而, 从任一个向量  $v$  开始, 通过平均整个群可得到  $G$ -不变的向量。平均是经常用到的一个重要过程。以前在第六章我们用过一次求平面上有限群作用的不动点。  $G$ -不变平均向量是

**【10.2.2】** 
$$\tilde{v} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} gv$$

对于正规化因子  $\frac{1}{|G|}$  的理由是, 如果  $v$  本身恰好是  $G$ -不变的, 则  $\tilde{v} = v$ 。

我们证明  $\tilde{v}$  是  $G$ -不变的: 因为符号  $g$  在和式使用(10.2.2), 所以把  $G$ -不变条件写为对所有  $h \in G$ ,  $h\tilde{v} = \tilde{v}$ 。证明是基于  $h$  的左乘定义了一个从  $G$  到自身的双射的事实。做替换  $g' = hg$ 。这样, 当  $g$  遍历群  $G$  的元素时,  $g'$  也遍历, 尽管遍历的顺序不同, 且

**【10.2.3】** 
$$h\tilde{v} = h \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} gv = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g'v = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} gv = \tilde{v}$$

当第一次看到这个推理时, 可能让人觉得混乱。所以, 我们以  $G = S_3$  为例加以说明。按通常那样列出群的元素:  $g = 1, x, x^2, y, xy, x^2y$ 。这样,  $g' = hg$  列出群的元素顺序  $g' = y, x^2y, xy, 1, x^2, x$ 。于是

$$\sum_{g \in G} g'v = yv + x^2yv + xyv + 1v + x^2v + xv = \sum_{g \in G} gv$$

$h$  的左乘是双射的事实蕴含着  $g'$  将永远以某个顺序遍历群。请研究这个重置下标的技巧。

平均过程也许没有产生有意思的向量。有可能  $\tilde{v} = 0$ 。

接下来, 我们转到  $G$ -不变子空间。

**注** 令  $\rho$  是  $G$  在  $V$  上的表示。  $V$  的子空间  $W$  称为  $G$ -不变的, 如果  $gw \in W$  对所有  $w \in W$  与所有  $g \in G$  成立。于是, 群元素的作用把  $W$  变到自身: 对所有  $g$ ,

**【10.2.4】**  $gW \subset W$  或  $\rho_g W \subset W$

这是第四章第四节引进的  $T$ -不变子空间的概念的延伸。我们在这里要问, 对每个算子  $\rho_g$ ,  $W$  是不变子空间吗?

当  $W$  为  $G$ -不变时, 可限制  $G$  的作用得到  $G$  在  $W$  上的表示。

**【10.2.5】引理** 如果  $W$  是  $V$  的不变子空间, 则  $gW = W$  对所有  $g \in G$  成立。

294

**证明** 因为群元素是可逆的, 故它们在  $V$  上的作用是可逆的。所以,  $gW$  与  $W$  有相同



的维数. 如果  $gW \subset W$ , 则  $gW = W$ . ■

**注** 如果  $V$  是  $G$ -不变子空间的直和, 比如说  $V = W_1 \oplus W_2$ , 则  $V$  上的表示  $\rho$  叫做它在  $W_1$  与  $W_2$  上限制的直和, 写为

$$\text{【10.2.6】} \quad \rho = \alpha \oplus \beta$$

其中  $\alpha$  与  $\beta$  分别表示  $\rho$  在  $W_1$  与  $W_2$  上的限制. 假设正是这种情形, 且设  $B = (B_1, B_2)$  是由相继列出  $W_1$  与  $W_2$  的基得到的  $V$  的基. 则  $\rho_g$  的矩阵将有分块矩阵形式

$$\text{【10.2.7】} \quad R_g = \begin{bmatrix} A_g & 0 \\ 0 & B_g \end{bmatrix}$$

其中  $A_g$  是  $\alpha$  关于所选取的基的矩阵,  $B_g$  是  $\beta$  关于所选取的基的矩阵. 块  $A_g$  下面的零反映了  $g$  的作用没有使子空间  $W_1$  的向量跑出  $W_1$  的事实, 而  $B_g$  上面的零反映了  $W_2$  的类似事实.

反过来, 如果  $R$  是一个矩阵表示, 且如果所有矩阵  $R_g$  有分块矩阵形式(10.2.7), 其中  $A_g$  与  $B_g$  是方阵, 我们就说矩阵表示  $R$  是直和  $A \oplus B$ .

例如, 因为对称群  $S_3$  同构于二面体群  $D_3$ , 故它是一个旋转群, 是  $SO_3$  的子群. 选取坐标使得  $x$  像绕  $e_3$  轴转过角度  $2\pi/3$  的旋转那样作用在  $\mathbf{R}^3$  上, 而  $y$  像绕  $e_1$  轴转过角度  $\pi$  的旋转那样作用. 这就给出了 3 维矩阵表示  $M$ :

$$\text{【10.2.8】} \quad M_x = \begin{bmatrix} c & -s & \\ s & c & \\ & & 1 \end{bmatrix}, \quad M_y = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{bmatrix}$$

其中  $c = \cos 2\pi/3$ ,  $s = \sin 2\pi/3$ . 我们看到  $M$  有块分解, 且它是标准表示与符号表示的直和  $A \oplus \Sigma$ .

甚至当表示  $\rho$  为直和时, 用基得到的矩阵表示也没有分块矩阵形式, 除非基与直和分解相容. 当一个表示没有用合适的基表出时, 如果不做进一步的分析, 将很难说一个表示是否为直和. 但如果我们找到表示  $\rho$  的这样一个分解, 则可试着进一步分解分量  $\alpha$  与  $\beta$ , 一直继续到不能分解为止.

**注** 如果  $\rho$  是群  $G$  在  $V$  上的一个表示, 且如果  $V$  没有真的  $G$ -不变子空间, 则  $\rho$  称为既约表示. 如果有真的  $G$ -不变子空间, 则  $\rho$  是可约的.

$S_3$  的标准表示是既约的.

假设表示  $\rho$  是可约的, 且令  $W$  是  $V$  的真  $G$ -不变子空间. 设  $\alpha$  是  $\rho$  在  $W$  上的限制. 我们把  $W$  的基扩展为  $V$  的基, 比如说  $B = (w_1, \dots, w_k; v_{k+1}, \dots, v_d)$ .  $\rho_g$  的矩阵有分块矩阵形式

$$\text{【10.2.9】} \quad R_g = \begin{bmatrix} A_g & * \\ 0 & B_g \end{bmatrix}$$

其中  $A$  是  $\alpha$  的矩阵, 而  $B_g$  是  $G$  的其他矩阵表示的矩阵. 我认为用  $*$  表示的块是“废物”. 下面的马什克定理告诉我们可避开这个废物. 但要这样做, 就必须更谨慎地选取基.

**【10.2.10】定理(马什克定理)** 有限群  $G$  在非零有限维复向量空间上的每个表示为既约表示的直和.

这个定理将在下一节证明. 这里我们用例子说明它, 其中  $G$  为对称群  $S_3$ . 考虑  $S_3$  的通过与置换  $x=(1\ 2\ 3)$  与  $y=(1\ 2)$  对应的置换矩阵表出的表示. 用  $N$  记这个表示:

$$\mathbf{【10.2.11】} \quad N_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad N_y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

这对矩阵没有块分解. 然而, 向量  $w_1=(1, 1, 1)^t$  为这两个矩阵所固定不动, 于是它是  $G$ -不变的, 且由  $w_1$  张成的 1 维子空间  $W$  也是  $G$ -不变的.  $N$  在这个子空间的限制是平凡表示  $T$ . 把  $\mathbb{C}^3$  的标准基变换为  $B=(w_1, e_2, e_3)$ . 关于这个新基, 表示  $N$  变为如下:

$$P = [B] = \left[ \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right]; \quad P^{-1}N_xP = \left[ \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array} \right], \quad P^{-1}N_yP = \left[ \begin{array}{c|cc} 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{array} \right]$$

右上的块不是 0, 所以, 我们没有表示的直和分解.

存在更好的方法: 矩阵  $N_x$  与  $N_y$  是酉的, 所以,  $N_g$  对所有  $g \in G$  是酉矩阵. (它们是正交的, 但我们正在考虑复表示.) 酉矩阵保持正交性. 因为  $W$  是  $G$ -不变的, 故正交空间  $W^\perp$  也是  $G$ -不变的(见(10.3.4)). 如果从  $W^\perp$  选取向量  $w_2$  与  $w_3$  构成一个基, 则废物消失. 置换表示  $N$  同构于直和  $T \oplus A$ . 不久, 我们将有技术来很简单地证明这个结论. 所以, 这里我们不要担心这样做.

使用正交空间所做的表示分解展示了我们下面研究的一般方法.

### 第三节 酉表示

令  $V$  是埃尔米特空间——具有正定埃尔米特型  $\langle, \rangle$  的复向量空间.  $V$  上的酉算子是具有性质

$$\mathbf{【10.3.1】} \quad \langle Tv, Tw \rangle = \langle v, w \rangle$$

的线性算子, 其中所有  $v, w \in V$  (8.6.3). 如果  $A$  是线性算子  $T$  关于一个正交基的矩阵, 则  $T$  是酉的当且仅当  $A$  是酉矩阵:  $A^* = A^{-1}$ . 296

注 埃尔米特空间  $V$  上的表示  $\rho: G \rightarrow GL(V)$  称为酉的, 如果对每个  $g$ ,  $\rho_g$  是酉算子. 可写这个条件为:

$$\mathbf{【10.3.2】} \quad \langle gv, gw \rangle = \langle v, w \rangle \quad \text{或} \quad \langle \rho_g v, \rho_g w \rangle = \langle v, w \rangle$$

对所有  $v, w \in V$  和所有  $g \in G$  成立. 类似地, 矩阵表示  $R: G \rightarrow GL_n$  是酉的, 如果对每个  $g \in G$ ,  $R_g$  是酉矩阵. 一个酉矩阵表示是从  $G$  到酉群的同态:

$$\mathbf{【10.3.3】} \quad R: G \rightarrow U_n$$

埃尔米特空间上的表示  $\rho$  是酉的当且仅当用正交基得到的矩阵表示是酉的.

**【10.3.4】引理** 令  $\rho$  是  $G$  在埃尔米特空间  $V$  上的酉表示, 且设  $W$  是  $G$ -不变子空间. 正交补  $W^\perp$  也是  $G$ -不变的, 且  $\rho$  是它在埃尔米特空间  $W$  与  $W^\perp$  上限制的直和. 这些限制也是酉表示.

**证明**  $V = W \oplus W^\perp$  成立 (8.5.1). 因为  $\rho$  是酉的, 故它保持正交性: 如果  $W$  是不变的, 且  $u \perp W$ , 则  $gu \perp_g W = W$ . 这意味着, 如果  $u \in W^\perp$ , 则  $gu \in W^\perp$ . ■

下一个推论用归纳法由该引理得到.

**【10.3.5】推论** 埃尔米特向量空间  $V$  上的每个酉表示  $\rho: G \rightarrow GL(V)$  是既约表示的正交和.

这里的技巧是对酉表示把条件 (10.3.2) 反过来, 将其看作型的条件而不是表示的条件. 假设已知向量空间  $V$  上的表示  $\rho: G \rightarrow GL(V)$ , 且设  $\langle, \rangle$  是  $V$  上正定埃尔米特型. 我们说型是  $G$ -不变的, 如果 (10.3.2) 成立. 当用型使  $V$  成为埃尔米特空间时, 这恰与说表示为酉的是一样的. 但如果表示  $\rho$  已给定, 则我们可自由地选取型.

**【10.3.6】定理** 令  $\rho: G \rightarrow GL(V)$  是有限群在向量空间  $V$  上的表示, 则  $V$  上存在  $G$ -不变的正定埃尔米特型.

**证明** 我们从  $V$  上任意一个正定埃尔米特型开始, 记这个型为  $\langle, \rangle$ . 例如, 可选取  $V$  的一个基, 并用其把  $\mathbb{C}^n$  上的标准埃尔米特型  $X^*Y$  转换到  $V$  上. 这样, 我们用平均过程构造另一个型. 平均型定义为

$$\langle v, w \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \langle gv, gw \rangle$$

我们断言这个型是埃尔米特的、正定的且是  $G$ -不变的. 容易证明这些性质. 我们略去前两个的证明, 但证明  $G$ -不变性. 证明与证明平均产生  $G$ -不变向量 (10.2.3) 几乎相同, 除了这里基于  $G$  的元素  $h$  的右乘定义双射  $G \rightarrow G$  的事实.

297

令  $h$  是  $G$  的元素. 必须证明  $\langle hv, hw \rangle = \langle v, w \rangle$  对所有  $v, w \in V$  (10.3.2) 成立. 做替换  $g' = gh$ . 当  $g$  遍历群时,  $g'$  也遍历群. 这样

$$\langle hv, hw \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_g \langle ghv, ghw \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g'} \langle g'v, g'w \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_g \langle gv, gw \rangle = \langle v, w \rangle \quad \blacksquare$$

定理 10.3.6 有著名的推论:

**【10.3.8】推论**

(a) (马什克定理) 有限群  $G$  的每个表示是既约表示的直和.

(b) 令  $\rho: G \rightarrow GL(V)$  是有限群  $G$  在向量空间  $V$  上的表示, 则  $V$  存在基  $B$  使得由  $\rho$  用这个基得到的矩阵表示是酉的.

(c) 令  $R: G \rightarrow GL_n$  是有限群  $G$  的矩阵表示, 则存在可逆矩阵  $P$  使得  $R'_g = P^{-1}R_gP$  对所有  $g$  是酉的, 亦即, 使得  $R'$  是从  $G$  到酉群  $U_n$  的同态.

(d)  $GL_n$  的每个有限子群与酉群  $U_n$  的子群共轭.

**证明**

(a) 这由定理 10.3.6 与推论 10.3.5 得到.

(b) 已知  $\rho$ , 选取  $V$  上的  $G$ -不变正定埃尔米特型, 且取  $B$  为关于这个型的标准正交基, 则伴随矩阵表示是酉的.

(c) 这是(b)的矩阵形式. 把  $R$  看作空间  $C^n$  上的表示, 然后变换基, 则它以通常方式导出.

(d) 把子群  $H$  到  $GL_n$  的包含看成  $H$  的矩阵表示, 由(c)得到该结论. ■

这个推论提供了定理 4.7.14 的另一个证明:

**【10.3.9】推论**  $GL_n(C)$  的每个有限阶矩阵  $A$  是可对角化的.

**证明** 矩阵  $A$  生成  $GL_n$  的有限子群. 由定理 10.3.8(d), 这个子群与酉群的一个子群共轭. 因此,  $A$  与一个酉矩阵共轭. 谱定理 8.6.8 告诉我们酉矩阵可对角化. 所以,  $A$  可对角化. ■

## 第四节 特征标

如同第一节所提到的, 几乎不用特征标研究表示的一个理由是因为表示是复杂的. 表示  $\rho$  的特征标  $\chi$  是复值函数, 其定义域为群  $G$ , 定义如下:

298

**【10.4.1】** 
$$\chi(g) = \text{trace} \rho_g$$

如果  $R$  是由  $\rho$  通过基的选取得到的矩阵表示, 则  $\chi$  也是  $R$  的特征标. 向量空间  $V$  的维数叫做表示  $\rho$  的维数, 也是它的特征标  $\chi$  的维数. 既约表示的特征标叫做既约特征标.

下面是特征标的一些基本性质.

**【10.4.2】命题** 令  $\chi$  是有限群  $G$  的表示  $\rho$  的特征标.

(a)  $\chi(1)$  是  $\chi$  的维数.

(b) 特征标在共轭类上为常数: 如果  $g' = hgh^{-1}$ , 则  $\chi(g') = \chi(g)$ .

(c) 令  $g$  是  $G$  的  $k$  阶元素.  $\rho_g$  的特征多项式的根是  $k$  次单位根  $\zeta = e^{2\pi i/k}$  的幂. 如果  $\rho$  的维数为  $d$ , 则  $\chi(g)$  是  $d$  个这样幂的和.

(d)  $\chi(g^{-1})$  是  $\chi(g)$  的复共轭  $\overline{\chi(g)}$ .

(e) 表示的直和  $\rho \oplus \rho'$  的特征标是它们特征标的和  $\chi + \chi'$ .

(f) 同构表示有相同的特征标.

**证明**

(a) 与(b)以前对于矩阵表示讨论过(见(10.1.6)).

(c)  $\rho_g$  的迹是它的特征值的和. 如果  $\lambda$  是  $\rho_g$  的特征值, 则  $\lambda^k$  是  $\rho_g^k$  的特征值, 且如果  $g^k = 1$ , 则  $\rho_g^k = 1$ ,  $\lambda^k = 1$ . 所以,  $\lambda$  是  $\zeta$  的幂.

(d)  $R_g$  的特征值  $\lambda_1, \dots, \lambda_d$  有绝对值 1, 因为它们是单位根. 对于有绝对值 1 的任意复数  $\lambda$ , 有  $\lambda^{-1} = \bar{\lambda}$ . 所以,  $\chi(g^{-1}) = \lambda_1^{-1} + \dots + \lambda_d^{-1} = \bar{\lambda}_1 + \dots + \bar{\lambda}_d = \overline{\chi(g)}$ .

(e) 与(f)是显然的. ■

简化特征标的计算有两点. 第一, 因为  $\chi$  在共轭类上为常数, 故仅需确定每个类里一个元素(即代表元)上的值  $\chi$ . 第二, 因为迹与基无关, 故对每个群元素可选取一个方便的基来计算它. 对所有元素不需要同一个基.

特征标上存在埃尔米特积, 定义为

$$\text{【10. 4. 3】} \quad \langle \chi, \chi' \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_g \overline{\chi(g)} \chi'(g)$$

当把  $\chi$  与  $\chi'$  如同表 10. 1. 6 中那样视为向量时, 这是通过因子  $\frac{1}{|G|}$  做了标准埃尔米特积 (8. 3. 3).

299

对每个共轭类把项分组重写这个公式是方便的. 这是允许的, 因为特征标在它们上是常数. 我们把共轭类任意地标号为  $C_1, \dots, C_r$ , 并用  $c_i$  表示类  $C_i$  的阶. 我们还在类  $C_i$  里选取代表元  $g_i$ . 这样

$$\text{【10. 4. 4】} \quad \langle \chi, \chi' \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{i=1}^r c_i \overline{\chi(g_i)} \chi'(g_i)$$

回到我们通常的例子: 令  $G$  是对称群  $S_3$ . 它的类方程是  $6=1+2+3$ , 且元素  $1, x, y$  分别代表阶为  $1, 2, 3$  的共轭类. 这样

$$\langle \chi, \chi' \rangle = \frac{1}{6} (\overline{\chi(1)} \chi'(1) + 2 \overline{\chi(x)} \chi'(x) + 3 \overline{\chi(y)} \chi'(y))$$

观察表 10. 1. 6, 我们发现

$$\text{【10. 4. 5】} \quad \langle \chi_A, \chi_A \rangle = \frac{1}{6} (4+2+0) = 1, \langle \chi_A, \chi_{\Sigma} \rangle = \frac{1}{6} (2+(-2)+0) = 0$$

特征标  $\chi_T, \chi_{\Sigma}, \chi_A$  关于埃尔米特积  $\langle, \rangle$  是正交的.

这些计算展示了关于特征标的主要定理. 这是代数学最漂亮的定理之一, 因为它是如此的优美, 如此地简化了表示的分类问题.

**【10. 4. 6】定理(主要定理)** 令  $G$  是有限群.

(a) (正交关系)  $G$  的既约特征标是标准正交的: 如果  $\chi_i$  是既约表示  $\rho_i$  的特征标, 则  $\langle \chi_i, \chi_i \rangle = 1$ . 如果  $\chi_i$  与  $\chi_j$  是非同构既约表示  $\rho_i$  与  $\rho_j$  的特征标, 则  $\langle \chi_i, \chi_j \rangle = 0$ .

(b) 存在有限多个既约表示的同构类, 其个数与群的共轭类的个数一样多.

(c) 设  $\rho_1, \dots, \rho_r$  表示  $G$  的既约表示的同构类, 且设  $\chi_1, \dots, \chi_r$  是它们的特征标, 则  $\rho_i$  (或  $\chi_i$ ) 的维数  $d_i$  整除群的阶  $|G|$ , 且  $|G| = d_1^2 + \dots + d_r^2$ .

这个定理将在第八节中证明, 但不证明  $d_i$  整除  $|G|$ .

应该将(c)与类方程比较. 令共轭类是  $C_1, \dots, C_r$ , 且设  $c_i = |C_i|$ , 则  $c_i$  整除  $|G|$ , 且  $|G| = c_1 + \dots + c_r$ .

主要定理允许我们用正交投影公式(8. 4. 11)将任一特征标分解为既约特征标的线性组合. 马什克定理告诉我们每个表示  $\rho$  同构于既约表示  $\rho_1, \dots, \rho_r$  的直和. 用符号将其写为

$$\text{【10.4.7】} \quad \rho \approx n_1 \rho_1 \oplus \cdots \oplus n_r \rho_r$$

其中  $n_i$  是非负整数, 且  $n_i \rho_i$  代表  $n_i$  个  $\rho_i$  的直和.

**【10.4.8】推论** 令  $\rho_1, \dots, \rho_r$  表示有限群  $G$  的既约表示的同构类, 且设  $\rho$  是  $G$  的任意表示. 令  $\chi_i$  与  $\chi$  分别是  $\rho_i$  与  $\rho$  的特征标, 且设  $n_i = \langle \chi, \chi_i \rangle$ . 那么

$$(a) \quad \chi = n_1 \chi_1 + \cdots + n_r \chi_r,$$

$$(b) \quad \rho \text{ 同构于 } n_1 \rho_1 \oplus \cdots \oplus n_r \rho_r.$$

(c) 有限群  $G$  的两个表示  $\rho$  与  $\rho'$  是同构的当且仅当它们的特征标是相等的.

**证明** 任一个表示  $\rho$  同构于表示  $\rho_i$  的整数线性组合  $m_1 \rho_1 \oplus \cdots \oplus m_r \rho_r$ , 从而  $\chi = m_1 \chi_1 \oplus \cdots \oplus m_r \chi_r$  (引理 10.4.2). 因为特征标  $\chi_i$  是正交的, 故投影公式表明  $m_i = n_i$ . 这就证明了 (a) 与 (b), 进一步可得 (c). ■

**【10.4.9】推论** 对任意特征标  $\chi$  与  $\chi'$ ,  $\langle \chi, \chi' \rangle$  是整数.

还要注意, 对于  $\chi$  如同 10.4.8(a), 有

$$\text{【10.4.10】} \quad \langle \chi, \chi \rangle = n_1^2 + \cdots + n_r^2$$

这个公式的一些推论是:

$$\langle \chi, \chi \rangle = 1 \Leftrightarrow \chi \text{ 是既约特征标,}$$

$$\langle \chi, \chi \rangle = 2 \Leftrightarrow \chi \text{ 是两个不同既约特征标的和,}$$

$$\langle \chi, \chi \rangle = 3 \Leftrightarrow \chi \text{ 是三个不同既约特征标的和,}$$

$$\langle \chi, \chi \rangle = 4 \Leftrightarrow \chi \text{ 或是四个不同既约特征标的和, 或对某个既约特征标 } \chi_i \text{ 有 } \chi = 2\chi_i.$$

群上的在每个共轭类上为常数的复值函数(诸如特征标)叫做类函数. 对每个共轭类通过指派任意值可给出类函数  $\varphi$ . 所以, 类函数的复向量空间  $\mathcal{H}$  的维数等于共轭类的个数. 我们用与 (10.4.3) 相同的积使  $\mathcal{H}$  成为埃尔米特空间:

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_g \overline{\varphi(g)} \psi(g)$$

**【10.4.11】推论** 既约特征标构成类函数空间  $\mathcal{H}$  的标准正交基.

**证明** 这由主要定理 (a) 与 (b) 可得. 特征标是无关系的, 因为它们是正交的. 它们张成  $\mathcal{H}$ , 因为  $\mathcal{H}$  的维数等于共轭类的个数. ■

利用主要定理容易看出,  $T$ ,  $\Sigma$  和  $A$  代表群  $S_3$  的既约表示的所有同构类(见本章第一节). 由于有三个共轭类, 故有三个既约表示. 在 (10.4.5) 上面我们证明了  $\langle \chi_A, \chi_A \rangle = 1$ , 所以,  $A$  是既约表示. 表示  $T$  与  $\Sigma$  显然是既约的, 因为它们是 1 维的. 而这三个表示又是不同构的, 因为它们的特征标是不同的.

群的既约特征标可列成一个表, 即群的特征标表. 习惯上, 特征标在共轭类上的值仅列出一次. 展示  $S_3$  的既约特征标的表 10.1.6 压缩成三列. 在下面的表里,  $S_3$  里的三个共轭类由代表元  $1, x, y$  描述, 为便于参考, 共轭类的阶在它们上面的括号里给出. 我们对每个既约特征标指派一个指标:  $\chi_T = \chi_1, \chi_\Sigma = \chi_2, \chi_A = \chi_3$ .

		共轭类			类的阶
		(1)	(2)	(3)	
既约特征标		1	$x$	$y$	代表元 特征标的值
	$\chi_1$	1	1	1	
	$\chi_2$	1	1	-1	
	$\chi_3$	2	-1	0	

## 【10.4.12】

对称群  $S_3$  的特征标表

在这样的表里，把平凡特征标(即平凡表示的特征标)放在了最上面的行里。它全由 1 组成。第一列列出了表示的维数(10.4.2)(a)。

其次，我们确定四面体的 12 个旋转对称的四面体群  $T$  的特征标表。令  $x$  表示绕一个面转过角度  $2\pi/3$  的旋转，令  $z$  表示绕一个边的中心转过角度  $\pi$  的旋转，如同图 7.10.8 所示。共轭类是  $C(1)$ ,  $C(x)$ ,  $C(x^2)$  与  $C(z)$ ，它们的阶分别为 1, 4, 4 与 3。所以，有 4 个既约特征标；设它们的维数为  $d_i$ 。这样， $12 = d_1^2 + \dots + d_4^2$ 。这个方程的唯一解是  $12 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 3^2$ ，于是，既约表示的维数是 1, 1, 1, 3，我们先写出元素不全的表：

		(1)	(4)	(4)	(3)
		1	$x$	$x^2$	$z$
$\chi_1$		1	1	1	1
$\chi_2$		1	$a$	$b$	$c$
$\chi_3$		1	$a'$	$b'$	$c'$
$\chi_4$		3	*	*	*

我们计算出型(10.4.4)在正交特征标  $\chi_1$  与  $\chi_2$  上的值。

## 【10.4.13】

$$\langle \chi_1, \chi_2 \rangle = \frac{1}{12}(1 + 4a + 4b + 3c) = 0$$

因为  $\chi_2$  是 1 维特征标，故  $\chi_2(z) = c$  是  $1 \times 1$  矩阵的迹。这是矩阵里唯一的元素。由于  $z^2 = 1$ ，故它的平方是 1。所以， $c$  是 1 或 -1。类似地，由于  $x^3 = 1$ ，故  $\chi_2(x) = a$  是  $\omega = e^{2\pi i/3}$  的幂。于是， $a$  等于 1,  $\omega$  或  $\omega^2$ 。而且， $b = a^2$ 。由(10.4.13)，可以看到  $a = 1$  是不可能的。可能的值是  $a = \omega$  或  $\omega^2$ ，从而  $c = 1$ 。同样的推理应用到特征标  $\chi_3$ 。因为  $\chi_2$  与  $\chi_3$  是不同的，又因为它们可互换，所以可假设  $a = \omega$  与  $a' = \omega^2$ 。自然会猜测既约 3 维特征标  $\chi_4$  也许是通过旋转是  $T$  的标准表示的特征标。通过计算那个特征标并检验  $\langle \chi, \chi \rangle = 1$  容易验证这个猜测。因为我们知道其他特征标，所以  $\chi_4$  也是由特征标是正交的事实确定的。特征标表是

## 【10.4.14】

		(1)	(4)	(4)	(3)
		1	$x$	$x^2$	$z$
$\chi_1$		1	1	1	1
$\chi_2$		1	$\omega$	$\omega^2$	1
$\chi_3$		1	$\omega^2$	$\omega$	1
$\chi_4$		3	0	0	-1

四面体群的特征标表

这些表里的列是正交的. 这是个一般现象, 其证明留作练习.

## 第五节 1 维特征标

1 维特征标是  $G$  在 1 维向量空间上的表示的特征标. 如果  $\rho$  是 1 维表示, 则  $\rho_g$  由  $1 \times 1$  矩阵  $R_g$  表示, 且  $\chi(g)$  是矩阵里唯一元素. 非严格地说,

$$\text{【10.5.1】} \quad \chi(g) = \rho_g = R_g$$

1 维特征标  $\chi$  是从  $G$  到  $GL_1 = \mathbb{C}^\times$  的同态, 因为

$$\chi(gh) = \rho_{gh} = \rho_g \rho_h = \chi(g)\chi(h)$$

如果  $\chi$  是 1 维的, 且如果  $g$  是  $G$  的  $k$  阶元素, 则  $\chi(g)$  是本原单位根  $\zeta = e^{2\pi i/k}$  的幂. 因为  $\mathbb{C}^\times$  是阿贝尔的, 故任一交换子都属于这样特征标的核.

观察特征标表可确定正规子群的许多事情. 1 维特征标  $\chi$  的核为使得  $\chi(g) = 1$  的共轭类  $C(g)$  的并. 例如, 在四面体群  $T$  的特征标表中, 特征标  $\chi_2$  的核是两个共轭类的并, 即为  $C(1) \cup C(y)$ . 它是我们以前见到过的 4 阶正规子群.

**注意** 维数大于 1 的特征标不是同态. 这样的特征标所取的值是单位根的和.

**【10.5.2】定理** 令  $G$  是有限阿贝尔群.

(a)  $G$  的每个既约特征标是 1 维的. 既约特征标的个数等于群的阶.

(b)  $G$  的每个矩阵表示  $R$  是可对角化的: 存在可逆矩阵  $P$  使得  $P^{-1}R_gP$  对所有  $g$  是可对角化的. 303

**证明** 在  $N$  阶阿贝尔群里, 有  $N$  个共轭类, 每个都只含有单个元素. 根据主要定理, 既约表示的个数也等于  $N$ . 公式  $N = d_1^2 + \cdots + d_N^2$  表明对所有  $i$ ,  $d_i = 1$ . ■

简单例子: 3 阶循环群  $C_3 = \{1, x, x^2\}$  有 3 个 1 维的既约特征标. 如果  $\chi$  是其中之一, 则  $\chi(x)$  是  $\omega = e^{2\pi i/3}$  的幂, 且  $\chi(x^2) = \chi(x)^2$ . 因为存在 3 个  $\omega$  的不同的幂与 3 个既约特征标, 故  $\chi_i(x)$  一定取到所有三个值. 所以,  $C_3$  的特征标表为

**【10.5.3】**

	(1)	(1)	(1)
	1	$x$	$x^2$
$\chi_1$	1	1	1
$\chi_2$	1	$\omega$	$\omega^2$
$\chi_3$	1	$\omega^2$	$\omega$

循环群  $C_3$  的特征标表

## 第六节 正则表示

令  $S = \{s_1, \dots, s_n\}$  是群  $G$  作用其上的有限序集, 且设  $R_g$  表示描述  $S$  上群元素  $g$  的作用的置换矩阵. 如果  $g$  作用于  $S$  上为置换  $p$ , 亦即, 如果  $gs_i = s_{p_i}$ , 则矩阵(见 1.5.7)



## 【10.6.1】

$$R_g = \sum_i e_{pi,i}$$

且  $R_g e_i = e_{pi}$ . 映射  $g \rightsquigarrow R_g$  定义  $G$  的矩阵表示  $R$ , 称为置换表示, 尽管这个短语在第六章第十一节有不同的意义.  $S_3$  的表示(10.2.11)是置换表示的例子.

$S$  的排序仅用于把  $R_g$  组织成矩阵. 不借助排序描述置换表示更好些. 为此, 我们引进向量空间  $V_S$ , 它具有由  $S$  的元素作为下标的无序基  $\{e_s\}$ .  $V_S$  的元素是线性组合  $\sum_g c_g e_g$ , 其中  $c_g$  是复系数. 如果已知  $G$  在  $S$  上的作用, 则  $G$  在  $V_S$  上的伴随置换表示  $\rho$  由

## 【10.6.2】

$$\rho_g(e_i) = e_{gs}$$

定义. 当选取  $S$  的一个序时, 基  $\{e_s\}$  变成有序基, 且  $\rho_g$  的矩阵有上面描述的形式.

置换表示的特征标非常容易计算:

**【10.6.3】引理** 令  $\rho$  是伴随于群  $G$  在非空有限集合  $S$  上作用的置换表示, 则所有  $g \in G$ ,  $\chi(g)$  是  $S$  的为  $g$  所固定不动的元素的个数.

**证明** 给  $S$  一个任意的序, 则对为  $g$  所固定不动的每个元素, 在矩阵  $R_g$  的对角线上存在 1(10.6.1), 且对不为  $g$  所固定不动的每个元素, 存在 0. ■

304

当分解  $G$  所作用的集合为轨道时, 我们将得到置换表示  $\rho$  或  $R$  的直和分解. 这很容易看到. 但有一个新的重要特征: 容易得到线性组合的事实允许我们进一步将表示分解. 甚至当  $G$  在  $S$  上的作用是可迁时,  $\rho$  也不是既约的, 除非  $S$  是单元素集合.

**【10.6.4】引理** 令  $R$  是伴随于群  $G$  在非空有限集合  $S$  上作用的置换表示, 当它的特征标  $\chi$  写成既约特征标的整数组合同时, 则平凡特征标  $\chi_1$  出现.

**证明**  $V_S$  的向量  $\sum_g e_g$  对应于  $\mathbb{C}^n$  里的  $(1, 1, \dots, 1)'$ , 由  $S$  的每个置换所固定不动, 所以, 它张成 1 维  $G$ -不变子空间, 群在其上的作用是平凡的. ■

**【10.6.5】例** 令  $G$  是四面体群  $T$ , 且设  $S$  是四面体的顶点集  $(v_1, \dots, v_4)$ .  $G$  在  $S$  上的作用定义  $G$  的一个 4 维表示. 同前面一样(见 7.10.8), 令  $x$  表示绕一个面转过  $2\pi/3$  角度的旋转,  $z$  表示绕一个边转过角度  $\pi$  的旋转. 这样,  $x$  是 3-循环  $(2\ 3\ 4)$ , 而  $z$  是  $(1\ 3)(2\ 4)$ . 伴随置换表示为

## 【10.6.6】

$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad R_z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

它的特征标为

## 【10.6.7】

$$\chi^{\text{vert}} \left| \begin{array}{cccc} 1 & x & x^2 & z \\ \hline 4 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right.$$

特征标表(10.4.14)表明  $\chi^{\text{vert}} = \chi_1 + \chi_4$ . 附带提一下, 确定特征标表中特征标  $\chi_4$  的另一个

办法是验证  $\langle \chi^{\text{vert}}, \chi^{\text{vert}} \rangle = 2$ . 这样,  $\chi^{\text{vert}}$  是两个既约特征标的和. 引理 10.6.4 表明它们之一是平凡特征标  $\chi_1$ . 所以,  $\chi^{\text{vert}} - \chi_1$  是既约特征标. 它一定是  $\chi_4$ . ■

注 群  $G$  的正则表示  $\rho^{\text{reg}}$  是伴随于  $G$  在自身左乘作用的表示. 它是向量空间  $V_G$  上的表示, 而  $V_G$  具有由  $G$  的元素为指标的基  $\{e_g\}$ . 如果  $h$  是  $G$  的元素, 则

$$\text{【10.6.8】} \quad \rho_k^{\text{reg}}(e_h) = e_{gh}$$

$G$  的以左乘到自身的作用并不是一个特别有意思的作用, 但其相伴随的置换表示  $\rho^{\text{reg}}$  是非常有意思的. 其特征标  $\chi^{\text{reg}}$  特别简单:

$$\text{【10.6.9】} \quad \chi^{\text{reg}}(1) = |G|; \chi^{\text{reg}}(g) = 0, \text{ 如果 } g \neq 1$$

这是成立的, 因为  $\chi^{\text{reg}}$  的维数是群的阶, 且用  $g$  左乘不能保持  $G$  的任一元素不变, 除了  $g=1$  的情形外.

305

这个简单的公式使得对于任意特征标  $\chi$  容易计算  $\langle \chi^{\text{reg}}, \chi \rangle$ :

$$\text{【10.6.10】} \quad \langle \chi^{\text{reg}}, \chi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_g \overline{\chi^{\text{reg}}(g)} \chi(g) = \frac{1}{|G|} \overline{\chi^{\text{reg}}(1)} \chi(1) = \chi(1) = \dim \chi$$

【10.6.11】推论 令  $\chi_1, \dots, \chi_r$  是有限群  $G$  的既约特征标, 且设  $\rho_i$  是具有特征标  $\chi_i$  的表示, 设  $d_i = \dim \chi_i$ . 这样,  $\chi^{\text{reg}} = d_1 \chi_1 + \dots + d_r \chi_r$ , 且  $\rho^{\text{reg}}$  同构于  $d_1 \rho_1 \oplus \dots \oplus d_r \rho_r$ .

这由(10.6.10)与投影公式得到. 难道它不漂亮吗? 计算维数

$$\text{【10.6.12】} \quad |G| = \dim \chi^{\text{reg}} = \sum_{i=1}^r d_i \dim \chi_i = \sum_{i=1}^r d_i^2$$

这是主要定理(c)的公式. 所以, 这个公式由正交关系(10.4.6)(a)得到.

例如, 对称群  $S_3$  的正则表示的特征标是

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & x & y \\ \hline \chi^{\text{reg}} & 6 & 0 & 0 \end{array}$$

看  $S_3$  的特征标表(10.4.12), 会看到  $\chi^{\text{reg}} = \chi_1 + \chi_2 + 2\chi_3$ , 这正如所预期的.

确定四面体群的最后一个特征标  $\chi_4$  (见(10.4.14))还有一个方法, 即用关系  $\chi^{\text{reg}} = \chi_1 + \chi_2 + \chi_3 + 3\chi_4$ .

其次, 我们确定二十面体群  $I$  的特征标表. 就我们所知,  $I$  同构于交错群  $A_5$  (7.4.4). 前面已经确定了共轭类(7.4.1). 它们列表如下, 代表元取自  $A_5$ :

【10.6.13】

类	代表元
$C_1 = \{1\}$	(1)
$C_2 = 15$ 个转过角度 $\pi$ 的边旋转	(1 2)(3 4)
$C_3 = 20$ 个转过角度 $\pm 2\pi/3$ 的顶点旋转	(1 2 3)
$C_4 = 12$ 个转过角度 $\pm 2\pi/5$ 的面旋转	(1 2 3 4 5)

$C_5 = 12$  个转过角度  $\pm 4\pi/5$  的面旋转

(1 3 5 2 4)

因为有 5 个共轭类, 故有 5 个既约特征标. 特征标表是

【10.6.14】

	(1)	(15)	(20)	(12)	(12)	角
	0	$\pi$	$2\pi/3$	$2\pi/5$	$4\pi/5$	
$\chi_1$	1	1	1	1	1	
$\chi_2$	3	-1	0	$\alpha$	$\beta$	
$\chi_3$	3	-1	0	$\beta$	$\alpha$	
$\chi_4$	4	0	1	-1	-1	
$\chi_5$	5	1	-1	0	0	

二十面体群  $I$  的特征标表

元素  $\alpha$  与  $\beta$  解释如下. 求既约特征标的一种方法是分解一些置换表示. 交错群  $A_5$  作用在 5 个指标的集合上. 这给出一个 5 维置换表示, 我们称之为  $\rho'$ . 它的特征标  $\chi'$  为

	0	$\pi$	$2\pi/3$	$2\pi/5$	$4\pi/5$	角
$\chi'$	5	1	2	0	0	

这样,  $\langle \chi', \chi' \rangle = \frac{1}{60}(1 \cdot 5^2 + 15 \cdot 1^2 + 20 \cdot 2^2) = 2$ . 所以,  $\chi'$  为两个不同既约特征标的和.

因为平凡表示是分项, 故  $\chi' - \chi_1$  是既约特征标, 即表中称为  $\chi_4$  的特征标.

其次, 二十面体群  $I$  作用在十二面体的 6 个对面偶对集合上; 设对应的 6 维特征标为  $\chi''$ . 类似的计算表明  $\chi'' - \chi_1$  是既约特征标  $\chi_5$ .

我们还有  $I$  作为旋转群的 3 维表示. 它的特征标是  $\chi_2$ . 为计算特征标, 我们记住  $\mathbf{R}^3$  的具有角度  $\theta$  的旋转的迹是  $1 + 2\cos\theta$ , 它也等于  $1 + e^{i\theta} + e^{-i\theta}$  (5.1.28).  $\chi_2$  的第二个与第三个元素为  $1 + 2\cos\pi = -1$  与  $1 + 2\cos 2\pi/3 = 0$ . 最后两个元素为

$$\alpha = 1 + 2\cos(2\pi/5) = 1 + \zeta + \zeta^4 \quad \text{与} \quad \beta = 1 + 2\cos(4\pi/5) = 1 + \zeta^2 + \zeta^3$$

其中  $\zeta = e^{2\pi i/5}$ . 余下的特征标  $\chi_3$  可由正交性确定, 或由下列关系确定:

$$\chi^{\text{reg}} = \chi_1 + 3\chi_2 + 3\chi_3 + 4\chi_4 + 5\chi_5$$

## 第七节 舒尔引理

令  $\rho$  与  $\rho'$  是群  $G$  在向量空间  $V$  与  $V'$  上的表示. 一个线性变换  $T: V' \rightarrow V$  称为  $G$ -不变的, 如果它与  $G$  的作用相容, 亦即对  $G$  中所有  $g$ ,

【10.7.1】

$$T(gv') = gT(v') \quad \text{或} \quad T \circ \rho'_g = \rho_g \circ T$$

如下图所示:

$$\begin{array}{ccc} V' & \xrightarrow{T} & V \\ \rho'_g \downarrow & & \downarrow \rho_g \\ V' & \xrightarrow{T} & V \end{array}$$

【10.7.2】

一个双射的  $G$ -不变的线性变换是表示的同构(10.1.16).

将  $G$ -不变的条件写成形式

$$T(v') = g^{-1}T(gv') \quad \text{或} \quad \rho_g^{-1}T\rho'_g = T$$

是有用的.  $G$ -不变的线性变换  $T$  的这个定义仅当表示  $\rho$  与  $\rho'$  给定时有意义. 当使用群作用符号  $T(gv') = gT(v')$  不是明确的时候, 记住这一点是重要的.

307

如果  $V$  与  $V'$  的基  $B$  与  $B'$  已给, 且如果  $R_g, R'_g, M$  表示  $\rho_g, \rho'_g$  与  $T$  关于这些基的矩阵, 则对  $G$  中所有  $g$ , 条件(10.7.1)变为

$$\text{【10.7.3】} \quad MR'_g = R_gM \quad \text{或} \quad R_g^{-1}MR'_g = M$$

矩阵  $M$  称为  $G$ -不变的, 如果它满足这个条件.

**【10.7.4】引理**  $G$ -不变的线性变换  $T:V' \rightarrow V$  的核与像分别是  $V'$  与  $V$  的  $G$ -不变子空间.

**证明** 任意线性变换的核与像是子空间. 要证核是  $G$ -不变的, 必须证明如果  $x$  属于  $\text{Ker}T$ , 则  $gx$  也属于  $\text{Ker}T$ , 亦即, 如果  $T(x)=0$ , 则  $T(gx)=0$ . 这是成立的:  $T(gx) = gT(x) = g0 = 0$ . 如果  $y$  属于  $T$  的像, 亦即, 对某个  $x$  属于  $V'$  有  $y = T(x)$ , 则  $gy = gT(x) = T(gx)$ , 于是,  $gy$  也属于  $T$  的像. ■

类似地, 如果  $\rho$  是  $G$  在  $V$  上的表示, 则  $V$  上的线性算子是  $G$ -不变的, 如果

$$\text{【10.7.5】} \quad T(gv) = gT(v), \quad \text{或} \quad \text{对所有 } g \in G, \rho_g \circ T = T \circ \rho_g$$

这意味着  $T$  与每个算子  $\rho_g$  交换. 这一条件的矩阵型是

$$R_gM = MR_g, \text{ 或者对所有 } g \in G, M = R_g^{-1}MR_g$$

因为  $G$ -不变的线性算子  $T$  与所有算子  $\rho_g$  必须交换, 故不变性是个强条件. 舒尔引理表明了这一点.

**【10.7.6】引理(舒尔引理)**

(a) 令  $\rho$  与  $\rho'$  分别是  $G$  在向量空间  $V$  与  $V'$  上的既约表示, 且设  $T:V' \rightarrow V$  是  $G$ -不变的变换, 则或者  $T$  是一个同构, 或者  $T=0$ .

(b) 令  $\rho$  是  $G$  在向量空间  $V$  上的既约表示, 且设  $T:V \rightarrow V$  是  $G$ -不变的线性算子, 则  $T$  是标量乘法:  $T=cI$ .

**证明**

(a) 假设  $T$  不是一个零映射. 因为  $\rho'$  是既约的, 且  $\text{Ker}T$  是  $G$ -不变子空间, 故  $\text{Ker}T$  或者为  $V'$ , 或者为  $\{0\}$ . 由于  $T \neq 0$ , 故它不是  $V'$ . 所以,  $\text{Ker}T = \{0\}$ , 且  $T$  是单的. 因为  $\rho$  是既约的, 且  $\text{im}T$  是  $G$ -不变的, 故  $\text{im}T$  或者为  $\{0\}$ , 或者为  $V$ . 由于  $T \neq 0$ , 故它不是  $\{0\}$ . 所以,  $\text{im}T = V$ , 且  $T$  是满的.

(b) 假设  $T$  是  $V$  上的  $G$ -不变的线性算子. 选取  $T$  的特征值  $\lambda$ . 线性算子  $S = T - \lambda I$  也是  $G$ -不变的.  $S$  的核不是零, 因为它含有  $T$  的特征向量. 所以,  $S$  不是同构. 由(a),  $S=0$  且  $T = \lambda I$ . ■

假设给定向量空间  $V$  与  $V'$  上的表示  $\rho$  与  $\rho'$ . 尽管  $G$ -不变的线性变换非常少, 但平均过程可以用来从任意线性变换  $T:V' \rightarrow V$  求得  $G$ -不变的变换. 平均是如下定义的线性变换  $\bar{T}$ :

308

$$\text{【10.7.7】} \quad \tilde{T}(v') = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g^{-1} (T(gv')) \quad \text{或} \quad \tilde{T} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho_g^{-1} T \rho'_g$$

类似地, 如果已知  $G$  的维数为  $n$  与  $m$  的矩阵表示  $R$  与  $R'$ , 且如果  $M$  是任意  $m \times n$  矩阵, 则平均矩阵是

$$\text{【10.7.8】} \quad \tilde{M} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} R_g^{-1} M R'_g$$

**【10.7.9】引理** 记号同上,  $\tilde{T}$  是  $G$ -不变线性变换, 且  $\tilde{M}$  是  $G$ -不变矩阵. 如果  $T$  是  $G$ -不变的, 则  $\tilde{T} = T$ , 且如果  $M$  是  $G$ -不变的, 则  $\tilde{M} = M$ .

**证明** 因为线性变换的合成与和是线性的, 故  $\tilde{T}$  是线性变换. 如果  $T$  是不变的, 则易见  $\tilde{T} = T$ . 要证  $\tilde{T}$  是不变的, 令  $h$  是  $G$  的元素, 我们证明  $\tilde{T} = h^{-1} \tilde{T} h$ . 做替换  $g_1 = gh$ . 像 (10.2.3) 中那样重新标号,

$$\begin{aligned} h^{-1} \tilde{T} h &= h^{-1} \left( \frac{1}{|G|} \sum_g g^{-1} T g \right) h = \frac{1}{|G|} \sum_g (gh)^{-1} T (gh) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_g g^{-1} T g_1 = \frac{1}{|G|} \sum_g g^{-1} T g = \tilde{T} \end{aligned}$$

$\tilde{M}$  是不变的证明是类似的. ■

尽管  $T$  不是零, 但平均过程可使  $\tilde{T} = 0$ , 这是一个平凡变换. 舒尔引理告诉我们这种情形一定发生, 如果  $\rho$  与  $\rho'$  是既约的和不同构的. 这个事实是下节给出不同既约特征标是正交的证明的基础. 对于线性算子, 平均常常不为 0, 因为迹为平均过程所保持.

**【10.7.10】命题** 设  $\rho$  是  $G$  在向量空间  $V$  上的既约表示. 令  $T: V \rightarrow V$  是线性算子, 设  $\tilde{T}$  如同 (10.7.7) 里的, 且  $\rho' = \rho$ , 则  $\text{trace } \tilde{T} = \text{trace } T$ . 如果  $\text{trace } T \neq 0$ , 则  $\tilde{T} \neq 0$ .

## 第八节 正交关系的证明

我们现在证明主要定理的 (a). 使用矩阵记号. 令  $\mathcal{M}$  表示  $m \times n$  矩阵空间  $\mathbf{C}^{m \times n}$ .

**【10.8.1】引理** 令  $A$  与  $B$  分别是  $m \times m$  与  $n \times n$  矩阵, 且设  $F$  是  $\mathcal{M}$  上由  $F(M) = AMB$  定义的线性算子, 则  $F$  的迹是积  $(\text{trace } A)(\text{trace } B)$ .

309

**证明** 算子的迹是它的特征值的和. 令  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  与  $\beta_1, \dots, \beta_n$  分别是  $A$  与  $B'$  的特征值. 如果  $X_i$  是  $A$  的伴随于特征值  $\alpha_i$  的特征向量, 而  $Y_j$  是  $B'$  的伴随于特征值  $\beta_j$  的特征向量, 则  $m \times n$  矩阵  $M = X_i Y_j$  是算子  $F$  的伴随于特征值  $\alpha_i \beta_j$  的特征向量. 由于  $\mathcal{M}$  的维数是  $mn$ , 故  $mn$  个复数  $\alpha_i \beta_j$  是所有特征值, 倘若它们是互不相同的. 如果是这样, 则

$$\text{trace } F = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j = \left( \sum_i \alpha_i \right) \left( \sum_j \beta_j \right) = (\text{trace } A)(\text{trace } B)$$

一般地, 存在任意接近于  $A$  与  $B$  的矩阵  $A'$  与  $B'$  使得它们的特征值的积是不同的, 于是引理由连续性得证 (见第五章第二节). ■

令  $\rho'$  与  $\rho$  分别是带有特征标  $\chi'$  与  $\chi$  的  $m$  维与  $n$  维表示, 且设  $R'$  与  $R$  是由  $\rho'$  与  $\rho$  利用任

意基得到的矩阵表示. 我们在空间 $\mathcal{M}$ 上定义线性算子 $\Phi$ 如下:

$$\text{【10.8.2】} \quad \Phi(M) = \frac{1}{|G|} \sum_g R_g^{-1} M R'_g = \tilde{M}$$

在前一节, 我们看到 $\tilde{M}$ 是 $G$ -不变矩阵, 且如果 $M$ 是不变的, 则 $\tilde{M}=M$ . 所以,  $\Phi$ 的像是 $G$ -不变矩阵空间. 我们用 $\tilde{\mathcal{M}}$ 记这个空间.

下一个引理的(a)与(b)用两种方法计算了算子 $\Phi$ 的迹. (c)是正交关系.

**【10.8.3】引理** 记号同上,

(a)  $\text{trace}\Phi = \langle \chi, \chi' \rangle.$

(b)  $\text{trace}\Phi = \dim \tilde{\mathcal{M}}.$

(c) 如果 $\rho$ 是既约表示, 则 $\langle \chi, \chi \rangle = 1$ , 且如果 $\rho'$ 与 $\rho$ 是非同构既约表示, 则 $\langle \chi, \chi' \rangle = 0$ .

**证明**

(a) 回忆 $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$ (10.4.2)(d). 令 $F_g$ 表示 $\mathcal{M}$ 上由 $F_g(M) = R_g^{-1} M R'_g$ 定义的线性算子. 因为迹是线性的, 故引理10.8.1表明

$$\begin{aligned} \text{【10.8.4】} \quad \text{trace}\Phi &= \frac{1}{|G|} \sum_g \text{trace}F_g = \frac{1}{|G|} \sum_g (\text{trace}R_g^{-1})(\text{trace}R'_g) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_g \chi(g^{-1})\chi'(g) = \frac{1}{|G|} \sum_g \overline{\chi(g)}\chi'(g) = \langle \chi, \chi' \rangle \end{aligned}$$

(b) 令 $\mathcal{N}$ 是 $\Phi$ 的核. 如果 $M$ 属于交 $\tilde{\mathcal{M}} \cap \mathcal{N}$ , 则 $\Phi(M) = M$ , 并且 $\Phi(M) = 0$ , 于是 $M = 0$ . 交是零空间. 所以,  $\mathcal{M}$ 是直和 $\tilde{\mathcal{M}} \oplus \mathcal{N}$ (4.3.1)(b). 通过附加 $\tilde{\mathcal{M}}$ 与 $\mathcal{N}$ 的基选取 $\mathcal{M}$ 的基. 因为如果 $M$ 是不变的, 则 $\tilde{M} = M$ , 所以 $\Phi$ 在 $\tilde{\mathcal{M}}$ 上为恒等的. 所以,  $\Phi$ 的矩阵有分块矩阵形式

$$\begin{bmatrix} I & \\ & 0 \end{bmatrix}$$

其中 $I$ 是 $\dim \tilde{\mathcal{M}}$ 阶的恒等矩阵. 它的迹等于 $\tilde{\mathcal{M}}$ 的维数.

310

(c) 应用(a)与(b):  $\langle \chi, \chi' \rangle = \dim \tilde{\mathcal{M}}$ . 如果 $\rho'$ 与 $\rho$ 是既约的且是非同构的, 则舒尔引理告诉我们唯一 $G$ -不变的算子是0, 于是, 唯一 $G$ -不变矩阵是零矩阵. 所以,  $\tilde{\mathcal{M}} = \{0\}$ 且 $\langle \chi, \chi' \rangle = 0$ , 如果 $\rho' = \rho$ , 由舒尔引理有 $G$ -不变矩阵有形式 $cI$ . 这样,  $\tilde{\mathcal{M}}$ 有维数1, 且 $\langle \chi, \chi' \rangle = 1$ . ■

为证明定理10.4.6(b), 即既约特征标的个数等于群里共轭类的个数, 我们转向算子记号. 同前面一样,  $\mathcal{H}$ 表示类函数空间. 它的维数等于共轭类的个数(见(10.4.11)). 令 $\mathcal{C}$ 表示 $\mathcal{H}$ 的由特征标张成的子空间. 我们通过证明 $\mathcal{H}$ 中与 $\mathcal{C}$ 正交的空间为0来证明 $\mathcal{C} = \mathcal{H}$ . 下一个引理做这件事.

**【10.8.5】引理**

(a) 令 $\varphi$ 是 $G$ 上的与每个特征标正交的类函数, 则对 $G$ 的任意表示 $\rho$ ,  $\frac{1}{|G|} \sum_g \overline{\varphi(g)} \rho_g$ 是零算子.

(b) 令  $\rho^{\text{reg}}$  是  $G$  的正则表示, 则具有下标  $g \in G$  的诸算子  $\rho_g^{\text{reg}}$  是线性无关的.

(c) 与每个特征标都正交的唯一类函数  $\varphi$  是零函数.

证明

(a) 因为任意表示是既约表示的直和, 故可设  $\rho$  是既约的. 令  $T = \frac{1}{|G|} \sum_g \overline{\varphi(g)} \rho_g$ . 我们首先证明  $T$  是  $G$ -不变算子, 亦即, 对每个  $h \in G$ ,  $T = \rho_h^{-1} T \rho_h$ . 令  $g'' = h^{-1} g h$ , 这样, 当  $g$  遍历群  $G$  时,  $g''$  也遍历群  $G$ . 因为  $\rho$  是同态, 故  $\rho_h^{-1} \rho_g \rho_h = \rho_{g''}$ ; 因为  $\varphi$  是类函数, 故  $\varphi(g) = \varphi(g'')$ . 所以

$$\rho_h^{-1} T \rho_h = \frac{1}{|G|} \sum_g \overline{\varphi(g)} \rho_g'' = \frac{1}{|G|} \sum_g \overline{\varphi(g'')} \rho_g'' = \frac{1}{|G|} \sum_g \overline{\varphi(g)} \rho_g = T$$

令  $\chi$  是  $\rho$  的特征标.  $T$  的迹是  $\frac{1}{|G|} \sum_g \overline{\varphi(g)} \chi(g) = \langle \varphi, \chi \rangle$ . 因为  $\varphi$  与  $\chi$  正交, 故这个迹为零. 由于  $\rho$  是既约的, 故由舒尔引理可知  $T$  是标量乘法. 因为它的迹为零, 故  $T=0$ .

(b) 应用公式(10.6.8)到  $V_G$  的基元素  $e_1$  得:  $\rho_k^{\text{reg}}(e_1) = e_k$ . 这样, 因为向量  $e_k$  是  $V_G$  的无关元素, 故算子  $\rho_k^{\text{reg}}$  也是无关的.

(c) 令  $\varphi$  是与每个特征标都正交的类函数. (a) 告诉我们  $\sum_k \overline{\varphi(g)} \rho_k^{\text{reg}} = 0$  是算子  $\rho_k^{\text{reg}}$  间的线性关系, 由(b), 它是无关的. 所以, 所有系数  $\overline{\varphi(g)}$  是零, 从而  $\varphi$  是零函数. ■

## 第九节 $SU_2$ 的表示

311

值得注意的是, 当群上的求和为积分所替换时, 正交关系就搬到了紧群——矩阵空间的紧子集的矩阵群上. 在本节中, 我们针对特殊酉群  $SU_2$  的一些表示证明这个断言.

从定义我们将要分析的表示开始. 令  $H_n$  表示变量  $u, v$  的形如

$$\text{【10.9.1】} \quad f(u, v) = c_0 u^n + c_{n-1} u^{n-1} v + \cdots + c_{n-1} u v^{n-1} + c_n v^n$$

的  $n$  次齐次多项式的复向量空间. 我们定义表示

$$\text{【10.9.2】} \quad \rho_n : SU_2 \rightarrow GL(H_n)$$

如下:  $SU_2$  的元素  $P$  作用于  $H_n$  中多项式  $f$  的结果是记为  $[Pf]$  的另一个多项式. 定义是

$$\text{【10.9.3】} \quad [Pf](u, v) = f(ua + vb, -u\bar{b} + v\bar{a}), \text{ 其中 } P = \begin{bmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{bmatrix}$$

换句话说,  $P$  的作用就是用  $(u, v)P$  替换变量  $(u, v)$ . 因此

$$[Pu^i v^j] = (ua + vb)^i (-u\bar{b} + v\bar{a})^j$$

当  $P$  是对角阵时, 容易计算这个算子的矩阵. 令  $\alpha = e^{i\theta}$ , 且设

$$\text{【10.9.4】} \quad A_\theta = \begin{bmatrix} e^{i\theta} & \\ & e^{-i\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \\ & \bar{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \\ & \alpha^{-1} \end{bmatrix}.$$

这样,  $[A_\theta u^i v^j] = (\alpha u)^i (\alpha^{-1} v)^j = u^i v^j \alpha^{i-j}$ . 所以,  $A_\theta$  像对角阵

$$\begin{bmatrix} \alpha^n & & & \\ & \alpha^{n-2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha^{-n} \end{bmatrix}$$

一样作用在空间  $H_n$  的基  $(u^n, u^{n-1}v, \dots, uv^{n-1}, v^n)$  上.

表示  $\rho_n$  的特征标  $\chi_n$  的定义同前面的一样:  $\chi_n(g) = \text{trace} \rho_{n,g}$ . 它在共轭类上是常数, 为球面  $SU_2$  上的纬. 正因如此, 只要计算每个纬中一个矩阵上的特征标  $\chi_n$  就够了. 我们利用  $A_\theta$ . 为简化记号, 将  $\chi_n(A_\theta)$  写为  $\chi_n(\theta)$ . 特征标为

$$\begin{aligned} \chi_0(\theta) &= 1 \\ \chi_1(\theta) &= \alpha + \alpha^{-1} \\ \chi_2(\theta) &= \alpha^2 + 1 + \alpha^{-2} \\ &\dots \end{aligned}$$

$$\text{【10.9.5】} \quad \chi_n(\theta) = \alpha^n + \alpha^{n-2} + \dots + \alpha^{-n} = \frac{\alpha^{n+1} - \alpha^{-(n+1)}}{\alpha - \alpha^{-1}}$$

替换(10.4.3)的埃尔米特积是

$$\text{【10.9.6】} \quad \langle \chi_m, \chi_n \rangle = \frac{1}{|G|} \int_G \overline{\chi_m(g)} \chi_n(g) dV$$

在这个公式中,  $G$  代表群  $SU_2$ , 是单位 3-球面,  $|G|$  是单位球面的 3 维体积, 而  $dV$  代表关于 3 维体积的积分. 特征标恰好为实值函数, 于是, 公式里出现的复共轭是没有关系的.

**【10.9.7】定理** 上面定义的  $SU_2$  的特征标是标准正交的: 如果  $m \neq n$ , 则  $\langle \chi_m, \chi_n \rangle = 0$ , 且  $\langle \chi_n, \chi_n \rangle = 1$ .

**证明** 因为特征标在纬上是常数, 我们可通过分割薄片计算积分(10.9.6), 就像我们在微积分里学得的那样. 用单位圆  $x_0 = \cos\theta$ ,  $x_1 = \sin\theta$  与  $x_2 = \dots = x_n = 0$  参数化单位  $n$ -球面:  $\{x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$  的薄片. 于是,  $\theta = 0$  是北极, 且  $\theta = \pi$  是南极(见第九章第二节). 对于  $0 < \theta < \pi$ , 单位  $n$ -球面的薄片是半径为  $\sin\theta$  的  $(n-1)$ -球面.

要通过薄片计算积分, 我们关于单位圆上的弧长做积分. 令  $\text{vol}_n(r)$  表示半径为  $r$  的  $n$ -球面的  $n$  维体积. 于是,  $\text{vol}_1(r)$  是半径为  $r$  的圆的弧长, 而  $\text{vol}_2(r)$  半径为  $r$  的 2-球面的表面积. 如果  $f$  是在薄片  $\theta = c$  上为常数的  $n$ -球面  $S^n$  上的函数, 则它的积分将是

$$\text{【10.9.8】} \quad \int_{S^n} f dV_n = \int_0^\pi f(\theta) \text{vol}_{n-1}(\sin\theta) d\theta$$

其中  $dV_n$  表示关于  $n$  维体积的积分,  $f(\theta)$  表示  $f$  在薄片上的值.

通过薄片积分对球的体积提供了一个迭代公式:

$$\text{【10.9.9】} \quad \text{vol}_n(1) = \int_{S^n} 1 dV_n = \int_0^\pi \text{vol}_{n-1}(\sin\theta) d\theta$$



且  $\text{vol}_n(r) = r^n \text{vol}_n(1)$ . 0-球面  $x_0^2 = r^2$  由两个点构成. 它的 0 维体积是 2. 所以

$$\text{vol}_1(r) = r \int_0^\pi \text{vol}_0(\sin\theta) d\theta = r \int_0^\pi 2 d\theta = 2\pi r,$$

【10.9.10】 
$$\text{vol}_2(r) = r^2 \int_0^\pi \text{vol}_1(\sin\theta) d\theta = r^2 \int_0^\pi 2\pi \sin\theta d\theta = 4\pi r^2,$$

$$\text{vol}_3(r) = r^3 \int_0^\pi \text{vol}_2(\sin\theta) d\theta = r^3 \int_0^\pi 4\pi \sin^2\theta d\theta = 2\pi^2 r^3.$$

要计算最后一个积分, 使用公式  $\sin\theta = -i(\alpha - \alpha^{-1})/2$  是方便的.

313 【10.9.11】 
$$\text{vol}_2(\sin\theta) = 4\pi \sin^2\theta = -\pi(\alpha - \alpha^{-1})^2$$

展开得,  $\text{vol}_2(\sin\theta) = \pi(2 - (\alpha + \alpha^{-1}))$ .  $\alpha^2 + \alpha^{-2}$  的积分为零:

【10.9.12】 
$$\int_0^\pi (\alpha^k + \alpha^{-k}) d\theta = \int_0^{2\pi} \alpha^k d\theta = \begin{cases} 0 & \text{如果 } k > 0 \\ 2\pi & \text{如果 } k = 0 \end{cases}$$

我们现在计算积分(10.9.6). 群  $SU_2$  的体积是

【10.9.13】 
$$\text{vol}_3(1) = 2\pi^2$$

含有  $A_\theta$  的纬球半径为  $\sin\theta$ . 因为特征标是实的, 故通过薄片的积分给出

【10.9.14】 
$$\begin{aligned} \langle \chi_m, \chi_n \rangle &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi \chi_m(\theta) \chi_n(\theta) \text{vol}_2(\sin\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi \left( \frac{\alpha^{m+1} - \alpha^{-(m+1)}}{\alpha - \alpha^{-1}} \right) \left( \frac{\alpha^{n+1} - \alpha^{-(n+1)}}{\alpha - \alpha^{-1}} \right) (-\pi(\alpha - \alpha^{-1})^2) d\theta \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (\alpha^{m+n+2} + \alpha^{-(m+n+2)}) d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (\alpha^{m-n} + \alpha^{n-m}) d\theta \end{aligned}$$

如果  $m=n$ , 则这个值为 1; 否则, 值为 0(见(10.9.12)). 特征标  $\chi_n$  是标准正交的. ■

我们将不证明下面的定理, 尽管证明由有限群情形很容易得到. 如果你感兴趣, 可参见 [Sepanski].

【10.9.15】定理  $SU_2$  的每个连续表示同构于表示  $\rho_n$  的直和(10.9.2).

我们把明显的推广留给读者.

— Israel Horstein

## 练 习

### 第一节 定义

1.1 证明有限群的维数为 1 的表示的像是循环群.

1.2 (a) 对  $\mathbf{R}^3$  选取适当的基, 具体写出八面体群  $O$  的标准表示.

(b) 对二面体群  $D_n$  做同样的事情.

### 第二节 既约表示

314 2.1 证明四面体群  $T$  的标准 3 维表示作为复表示是既约的.

- 2.2 考虑二面体群  $D_n$  的标准 2 维表示. 对哪个  $n$ , 这是既约复表示?
- 2.3 假设给定向量空间  $V$  上对称群  $S_3$  的表示. 令  $x$  与  $y$  表示  $S_3$  的通常生成元.
- (a) 令  $u$  是  $V$  中非零向量, 设  $v = u + xu + x^2u$  与  $w = u + yu$ . 通过分析  $v, w$  的  $G$ -轨道, 证明  $V$  含有维数至多为 2 的非零不变子空间.
- (b) 证明  $G$  的所有既约 2 维表示都是同构的, 并确定  $G$  的所有既约表示.

### 第三节 酉表示

- 3.1 令  $G$  是 3 阶循环群. 矩阵  $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  阶为 3, 于是, 它定义了  $G$  的一个矩阵表示. 用平均过程由  $C^2$  上的标准埃尔米特积  $X * Y$  构造一个  $G$ -不变型.
- 3.2 令  $\rho: G \rightarrow GL(V)$  是实向量空间  $V$  上有限群的一个表示. 证明下列结论:
- (a)  $V$  上存在  $G$ -不变的正定的对称型  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .
- (b)  $\rho$  是既约表示的直和.
- (c)  $GL_n(\mathbf{R})$  的每个有限子群与  $O_n$  的一个子群共轭.
- 3.3 (a) 令  $R: G \rightarrow SL_2(\mathbf{R})$  是由行列式为 1 的实  $2 \times 2$  矩阵确定的有限群的一个忠实表示. 用练习 3.2 的结果证明  $G$  是一个循环群.
- (b) 确定具有忠实实 2 维表示的有限群.
- (c) 确定具有行列式为 1 的忠实 3 维表示的有限群.
- 3.4 令  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  是向量空间  $V$  上的非退化斜对称型, 且设  $\rho$  是有限群  $G$  在  $V$  上的表示. 证明平均过程 (10.3.7) 构造出  $V$  上  $G$ -不变的斜对称型, 并通过例子说明用这种方式得到的型不一定是非退化的.
- 3.5 令  $x$  是  $p$  阶循环群  $G$  的生成元. 映  $x \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{bmatrix}$  定义了矩阵表示  $G \rightarrow GL_2(\mathbf{F}_p)$ . 证明这个表示不是既约表示的直和.

### 第四节 特征标

- 4.1 求八面体群、四元数群与二面体群  $D_4, D_5$  和  $D_6$  的既约表示的维数.
- 4.2 非阿贝尔群  $G$  的阶为 55. 确定它的类方程与它的既约特征标.
- 4.3 确定下面群的特征标表:
- (a) 克莱因四元群
- (b) 四元数群
- (c) 二面体群  $D_4$
- (d) 二面体群  $D_6$
- (e) 21 阶非阿贝尔群 (见命题 7.7.7)
- 4.4 令  $G$  是二面体群  $D_5$ , 它由生成元  $x, y$  和关系  $x^5 = 1, y^2 = 1, yxy^{-1} = x^{-1}$  表出, 且设  $\chi$  是  $G$  的任意 2 维特征标.
- (a) 关于  $\chi(x)$ , 由关系  $x^5 = 1$  可得出什么结论?
- (b) 关于  $\chi(x)$ , 由  $x$  与  $x^{-1}$  共轭的事实可得出什么结论?
- (c) 确定  $G$  的特征标.
- (d) 把  $D_5$  的每个既约特征标的限制分解成  $C_5$  的既约特征标.
- 4.5 令  $G = \langle x, y \mid x^5, y^4, yxy^{-1}x^{-2} \rangle$ , 确定  $G$  的特征标表.
- 4.6 解释如何调整一个特征标表的元素来构造一个酉矩阵, 并且证明特征标表的列是正交的.

4.7 令  $\pi: G \rightarrow G' = G/N$  是从有限群到一个商群的典范映射, 且设  $\rho'$  是  $G'$  的既约表示. 用两种方法证明  $G$  的表示  $\rho = \rho' \circ \pi$  是既约的: 直接证明, 利用定理 10.4.6.

4.8 求下列特征标表中缺失的行:

	(1)	(3)	(6)	(6)	(8)
$\chi_1$	1	1	1	1	1
$\chi_2$	1	1	-1	-1	1
$\chi_3$	3	-1	1	-1	0
$\chi_4$	3	-1	-1	1	0

4.9 下面是特征标表中的一部分. 缺少一个共轭类.

	(1)	(1)	(2)	(2)	(3)
	1	$u$	$v$	$w$	$x$
$\chi_1$	1	1	1	1	1
$\chi_2$	1	1	1	1	-1
$\chi_3$	1	-1	1	-1	$i$
$\chi_4$	1	-1	1	-1	$-i$
$\chi_5$	2	2	-1	-1	0

(a) 将特征标表补充完整.

(b) 确定每个共轭类代表元的阶.

(c) 确定正规子群.

(d) 描述这个群.

4.10 (a) 求下面特征标表中缺失的行.

(b) 确定元素  $a, b, c, d$  的阶.

(c) 证明拥有这个特征标表的群  $G$  有一个 10 阶的子群  $H$ , 并将这个子群描述为共轭类的并.

(d) 确定  $H$  是  $C_{10}$  还是  $D_5$ .

(e) 确定  $G$  的所有正规子群.

	(1)	(4)	(5)	(5)	(5)
	1	$a$	$b$	$c$	$d$
$\chi_1$	1	1	1	1	1
$\chi_2$	1	1	-1	-1	1
$\chi_3$	1	1	$-i$	$i$	-1
$\chi_4$	1	1	$i$	$-i$	-1

4.11 在下列特征标表中,  $\omega = e^{2\pi i/3}$ .

	(1)	(6)	(7)	(7)	(7)	(7)	(7)
	1	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$
$\chi_1$	1	1	1	1	1	1	1
$\chi_2$	1	1	1	$\omega$	$\bar{\omega}$	$\omega$	$\bar{\omega}$
$\chi_3$	1	1	1	$\bar{\omega}$	$\omega$	$\bar{\omega}$	$\omega$
$\chi_4$	1	1	-1	$-\omega$	$-\bar{\omega}$	$\omega$	$\bar{\omega}$
$\chi_5$	1	1	-1	$-\bar{\omega}$	$-\omega$	$\bar{\omega}$	$\omega$
$\chi_6$	1	1	-1	-1	-1	1	1
$\chi_7$	6	-1	0	0	0	0	0

- (a) 证明  $G$  有一个同构于  $D_7$  的正规子群  $N$ .
- (b) 将每个特征标在  $N$  的限制分解为既约  $N$ -特征标.
- (c) 对  $p=2, 3, 7$  确定西罗  $p$ -子群的个数.
- (d) 确定代表元  $c, d, e, f$  的阶.
- (e) 确定  $G$  的所有正规子群.
- 4.12 令  $H$  是群  $G$  的指标为 2 的子群, 且设  $\sigma: H \rightarrow GL(V)$  是一个表示. 令  $a$  是  $G$  的但不属于  $H$  的元素. 由规则  $\sigma'(h) = \sigma(a^{-1}ha)$  定义共轭表示  $\sigma': H \rightarrow GL(V)$ . 证明
- (a)  $\sigma'$  是  $H$  的表示.
- (b) 如果  $\sigma$  是  $G$  的表示在  $H$  上的限制, 则  $\sigma'$  同构于  $\sigma$ .
- (c) 如果  $b$  是  $G$  的不属于  $H$  的另一个元素, 则表示  $\sigma''(h) = \sigma(b^{-1}hb)$  同构于  $\sigma'$ .

### 第五节 1 维特征标

- 5.1 用旋转分解循环群  $C_n$  的标准 2 维表示为既约(复)表示.
- 5.2 证明符号表示  $\rho \rightsquigarrow \text{sign} \rho$  与平凡表示是对称群  $S_n$  的仅有的 1 维表示.
- 5.3 假设群  $G$  恰有两个 1 维既约特征标, 且令  $\chi$  表示非平凡 1 维特征标. 证明对所有  $g \in G$ ,  $\chi(g) = \pm 1$ . 317
- 5.4 令  $\chi$  是维数为  $d$  的表示  $\rho$  的特征标. 证明对所有  $g \in G$ ,  $|\chi(g)| \leq d$ , 并且如果  $|\chi(g)| = d$ , 则  $\rho$  在某一个单位根  $\zeta$ ,  $\rho(g) = \zeta I$ . 而且, 如果  $\chi(g) = d$ , 则  $\rho_g$  是恒等算子.
- 5.5 证明群  $G$  的 1 维特征标在函数乘法下构成一个群. 这个群称为  $G$  的特征标群, 常记为  $\hat{G}$ . 证明如果  $G$  是阿贝尔的, 则  $|\hat{G}| = |G|$ , 且  $\hat{\hat{G}} \cong G$ .
- 5.6 令  $G$  是由元素  $x$  生成的  $n$  阶循环群, 且设  $\zeta = e^{2\pi i/n}$ .
- (a) 证明既约表示是  $\rho_0, \dots, \rho_{n-1}$ , 其中  $\rho_k: G \rightsquigarrow \mathbf{C}^\times$  由  $\rho_k(x) = \zeta^k$  定义.
- (b) 确定  $G$  的特征标群(见练习 5.5).
- 5.7 (a) 令  $\varphi: G \rightarrow G'$  是阿贝尔群的同态, 在它们的特征标群之间定义诱导同态  $\hat{\varphi}: \hat{G}' \rightarrow \hat{G}$ (见练习 5.5).
- (b) 证明如果  $\varphi$  是单的, 则  $\hat{\varphi}$  是满的. 反之亦然.

### 第六节 正则表示

- 6.1 令  $R^{reg}$  表示群  $G$  的正则矩阵表示. 确定  $\sum_g R_g^{reg}$ .
- 6.2 令  $\rho$  是伴随于  $D_3$  到自身的共轭作用的置换表示. 将  $\rho$  的特征标分解成既约特征标.
- 6.3 令  $\chi'$  表示四面体群  $T$  在四面体六个边上作用的表示的特征标. 将这个特征标分解成既约特征标.
- 6.4 (a) 确定八面体群  $O$  中的五个共轭类, 并且求出它的既约表示的阶.
- (b) 群  $O$  作用于下面这些集合:
- 立方体的六个面
  - 三个对面偶对
  - 八个顶点
  - 四个对顶点的偶对
  - 六个对边的偶对
  - 两个内切四面体

分解对应特征标为既约特征标.

(c) 计算  $O$  的特征标表.

6.5 对称群  $S_n$  通过置换坐标作用在  $\mathbf{C}^n$  上. 具体分解这个表示为既约表示.

提示: 建议不用正交关系. 这个问题与第四章的练习 M.1 关系密切.

6.6 分解二十面体群在其面集、边集与顶点集上作用的表示的特征标为既约特征标.

318 6.7 群  $S_3$  通过共轭作用在它的正规子群  $A_3$  上. 这个作用如何作用在  $A_3$  的既约表示的同构类上?

6.8 内切于十二面体的一个立方体的二十面体群里的稳定子是四面体群  $T$ . 分解  $I$  的既约特征标在  $T$  的限制.

6.9 (a) 解释如何通过观察群的特征标表证明群是单的.

(b) 用二十面体群的特征标表证明它是单群.

6.10 确定 12 阶非阿贝尔群的特征标表(见(7.8.1)).

6.11 群  $G = PSL_2(\mathbf{F}_7)$  的特征标表如下, 其中  $\gamma = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{7}i)$ ,  $\gamma' = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{7}i)$ .

	(1)	(2 1)	(2 4)	(2 4)	(4 2)	(5 6)
	1	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$
$\chi_1$	1	1	1	1	1	1
$\chi_2$	3	-1	$\gamma$	$\gamma'$	1	0
$\chi_3$	3	-1	$\gamma'$	$\gamma$	1	0
$\chi_4$	6	2	-1	-1	0	0
$\chi_5$	7	-1	0	0	-1	1
$\chi_6$	8	0	1	1	0	-1

(a) 用它给出这个群是单群的两个证明.

(b) 尽可能多地确定元素

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & \\ & 4 \end{bmatrix}$$

的共轭类对应的列, 并求出代表剩下的共轭类的矩阵.

(c)  $G$  作用在  $\mathbf{F}_7^3$  的八个 1 维子空间的集合上, 分解相伴随的特征标为既约特征标.

### 第七节 舒尔引理

7.1 证明舒尔引理的逆: 如果  $\rho$  是一个表示, 且如果  $V$  上仅有的  $G$ -不变线性算子是标量乘法, 则  $\rho$  是既约的.

7.2 令  $A$  是对称群  $S_3$  的标准表示(10.1.3), 且设  $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{bmatrix}$ . 用平均过程求出由  $B$  左乘的  $G$ -不变线性算子.

7.3 矩阵  $R_x = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ & & 1 \\ 1 & & -1 \end{bmatrix}$ ,  $R_y = \begin{bmatrix} & -1 & -1 \\ -1 & & 1 \\ & & -1 \end{bmatrix}$  定义群  $S_3$  的表示  $R$ . 设  $\varphi$  是线性变换  $\mathbf{C}^1 \rightarrow \mathbf{C}^3$ , 其

矩阵为  $(1, 0, 0)^t$ . 利用(10.1.4)在  $\mathbf{C}^1$  上的符号表示  $\Sigma$  与  $\mathbf{C}^3$  上的表示  $R$ , 应用平均方法由  $\varphi$  生成一个  $G$ -不变线性变换.

319

7.4 令  $\rho$  是  $G$  的表示, 且设  $C$  是  $G$  中的共轭类. 证明线性算子  $T = \sum_{g \in C} \rho_g$  是  $G$ -不变的.

- 7.5 令  $\rho$  是群  $G$  在  $V$  上的表示, 且设  $\chi$  是  $G$  的特征标, 不一定是  $\rho$  的特征标. 证明  $V$  上的线性算子  $T = \sum_k \chi(g) \rho_k$  是  $G$ -不变的.
- 7.6 计算引理 10.8.1 的算子  $F$  的矩阵, 并且用这个矩阵验证它的迹的公式.

### 第九节 $SU_2$ 的表示

- 9.1 通过 3 维切片计算  $\mathbf{R}^4$  中半径为  $r$  的 4-球  $\mathbf{B}^4$  (其轨迹为  $x_0^2 + \dots + x_3^2 \leq r^2$ ) 的 4 维体积. 通过微分验证你的答案.
- 9.2 证明作用(10.9.3)的结合律  $[Q[Pf]] = [(QP)f]$ .
- 9.3 证明正交表示(9.4.1)  $SU_2 \rightarrow SO_3$  是既约的.
- 9.4 如第九章第三节, 左乘定义了  $SU_2$  在坐标为  $x_0, \dots, x_3$  的空间  $\mathbf{R}^4$  上的一个表示. 将与之相伴随的表示分解为既约表示.
- 9.5 用定理 10.9.14 确定旋转群  $SO_3$  的既约表示.
- 9.6 (圆周群的表示) 这里所有的表示假设为  $\theta$  的可微函数. 令  $G$  是圆周群  $\{e^{i\theta}\}$ .
- (a) 令  $\rho$  是  $G$  在向量空间  $V$  上的表示, 证明在  $V$  上存在正定  $G$ -不变埃尔米特型.
- (b) 对  $G$  证明马什克定理.
- (c) 用 1-参数群描述  $G$  的表示, 并且用这个描述证明既约表示是 1 维的.
- (d) 利用埃尔米特积(10.9.6)的类似验证正交关系.
- 9.7 利用练习 8.6 确定正交群  $O_2$  的既约表示.

### 杂题

- M.1 在这个问题里表示是实的. 在“平地”(2 维世界)里分子  $M$  由三个类原子  $a_1, a_2, a_3$  构成, 形成一个三角形. 三角形在时刻  $t_0$  是等边的, 它的中心是在原点, 且  $a_1$  在正  $x$  轴上.  $M$  在时刻  $t_0$  的对称群  $G$  是二面体群  $D_3$ . 我们列出单个原子在  $t_0$  的速率, 并称 6 维向量  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)'$  为  $M$  的状态.  $G$  在状态向量的空间  $V$  上的作用定义了 6 维矩阵表示  $S$ . 例如, 绕原点转过角度  $2\pi/3$  的旋转  $\rho$  循环置换原子, 并同时旋转它们.
- (a) 令  $r$  是关于  $x$  轴的反射. 确定矩阵  $S_\rho$  与  $S_r$ .
- (b) 确定由  $S_\rho$  固定的向量空间  $W$ , 并证明  $W$  是  $G$ -不变的.
- (c) 具体分解  $W$  与  $V$  为既约  $G$ -不变子空间的直和.
- (d) 根据分子的运动和振动解释(c)里发现的子空间.
- M.2 关于恰有维数分别为 1, 2, 与 3 的三个既约特征标的群有什么结论?
- M.3 令  $\rho$  是群  $G$  的表示. 在下列的每个情形里确定  $\rho'$  是否为一个表示, 它是否一定同构于  $\rho$ .
- (a)  $x$  是  $G$  的固定元素, 且  $\rho'_k = \rho_{xgx^{-1}}$ .
- (b)  $\varphi$  是  $G$  的自同构, 且  $\rho'_k = \rho_{\varphi(k)}$ .
- (c)  $\sigma$  是  $G$  的 1 维表示, 且  $\rho'_k = \sigma_k \rho_k$ .
- M.4 证明群  $G$  的元素  $z$  属于  $G$  的中心当且仅当对所有既约表示  $\rho$ ,  $\rho(z)$  是标量乘法.
- M.5 令  $A, B$  是使其每个矩阵的某个正幂恒等的交换矩阵. 证明存在可逆矩阵  $P$  使得  $PAP^{-1}$  与  $PBP^{-1}$  都是对角的.
- M.6 令  $\rho$  是有限群  $G$  的既约表示. 正定  $G$ -不变埃尔米特型的唯一性如何?
- M.7 根据特征标表描述群  $G$  的交换子子群.

- M. 8 证明非素数阶的有限单群没有非平凡的 2 维表示.
- M. 9 令  $H$  是有限群  $G$  的指标为 2 的子群, 并设  $a$  是  $G$  的一个不属于  $H$  的元素, 于是  $H$  和  $aH$  是  $H$  的两个陪集.

(a) 给定子群  $H$  的矩阵表示  $S: H \rightarrow GL_n$ , 对  $h \in H$  与  $g \in aH$ , 定义  $G$  的一个诱导表示  $\text{ind}S: G \rightarrow GL_{2n}$  如下:

$$(\text{ind}S)_h = \begin{bmatrix} S_h & 0 \\ 0 & S_{a^{-1}ha} \end{bmatrix}, (\text{ind}S)_g = \begin{bmatrix} 0 & S_{ga} \\ S_{a^{-1}g} & 0 \end{bmatrix}$$

证明  $\text{ind}S$  是  $G$  的表示, 并描述它的特征标.

注: 元素  $a^{-1}ha$  将属于  $H$ , 但因为  $a$  不属于  $H$ , 故它不一定是  $h$  在  $H$  中的共轭.

- (b) 如果  $R: G \rightarrow GL_n$  是  $G$  的矩阵表示, 则可限制它到  $H$ . 将限制记为  $\text{res}R: H \rightarrow GL_n$ . 证明  $\text{res}(\text{ind}S) \approx S \oplus S'$ , 其中  $S'$  是由  $S'_h = S_{a^{-1}ha}$  定义的共轭表示.
- (c) 证明弗罗贝尼乌斯互反律:  $\langle \chi_{\text{ind}S}, \chi_R \rangle = \langle \chi_S, \chi_{\text{res}R} \rangle$ .
- (d) 令  $S$  是  $H$  的既约表示. 用弗罗贝尼乌斯互反律证明如果  $S$  不同构于共轭表示  $S'$ , 则诱导表示  $\text{ind}S$  是既约的; 另一方面, 如果  $S$  与  $S'$  是不同构的, 则  $\text{ind}S$  是  $G$  的两个既约表示的和.

- M. 10 令  $H$  是群  $G$  的指标为 2 的子群, 并设  $R$  是  $G$  的一个矩阵表示. 用  $R'_g$  记表示, 定义为如果  $g \in H$  则  $R'_g = R_g$ , 否则  $R'_g = -R_g$ .

(a) 证明  $R'$  同构于  $R$  当且仅当  $R$  的特征标在不等于  $H$  的陪集  $gH$  上恒等于零.

(b) 用弗罗贝尼乌斯互反律(练习 M. 9)证明  $\text{ind}(\text{res}R) \approx R \oplus R'$ .

(c) 假设  $R$  是既约的. 证明如果  $R$  不同构于  $R'$ , 则  $\text{res}R$  是既约的, 且如果这两个表示是同构的, 则  $\text{res}R$  是  $H$  的两个既约表示的和.

- M. 11 当 (a)  $n=3$ , (b)  $n=4$ , (c)  $n=5$  时, 用  $A_n$  的诱导表示导出  $S_n$  的特征标表.

- M. 12 用  $C_n$  的诱导表示导出二面体群  $D_n$  的特征标表.

- M. 13 令  $G$  是  $GL_n(\mathbb{C})$  的有限子群. 证明如果  $\sum_g \text{trace}g = 0$ , 则  $\sum_g g = 0$ .

- M. 14 令  $\rho: G \rightarrow GL(V)$  是有限群  $G$  的 2 维表示, 且假设对每个  $g \in G$ , 1 是  $\rho_g$  的特征值. 证明  $\rho$  是两个 1 维表示的和.

- M. 15 令  $\rho: G \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$  是有限群  $G$  的一个既约表示. 给定  $GL_n$  的一个表示  $\sigma: GL_n \rightarrow GL(V)$ , 考虑合成  $\sigma \circ \rho$  作为  $G$  的表示.

(a) 当  $\sigma$  是  $GL_n$  在  $n \times n$  矩阵空间  $V$  上的左乘时, 确定以这种方式得到的表示的特征标. 在此情形将  $\sigma \circ \rho$  分解为既约表示.

(b) 当  $\sigma$  是在  $\mathbb{C}^{n \times n}$  上的共轭作用时, 求  $\sigma \circ \rho$  的特征标.

321

322

# 第十一章 环

请忘掉你在中学所学的一切，  
因为你并没有学懂。

—Edmund Landau

## 第一节 环的定义

环是对于加法、减法、乘法封闭的代数结构，但对除法未必封闭。整数集合形成了这个概念的一个基本模型。

在进入环的定义之前，我们先看几个例子——复数集合  $\mathbf{C}$  的子环。一个复数集合的子环是一个子集，它关于加法、减法、乘法封闭，且含有 1。

**注** 高斯整数是形如  $a+bi$  的复数，其中  $a$  与  $b$  为整数，它构成了复数集合  $\mathbf{C}$  的一个子环，记作  $\mathbf{Z}[i]$ ：

$$\mathbf{Z}[i] = \{a+bi \mid a, b \in \mathbf{Z}\}$$

它的元素是复平面上的格子点。

类似于高斯整数的环，我们可以构造一个子环  $\mathbf{Z}[\alpha]$ ，从任何一个复数  $\alpha$  开始：由  $\alpha$  生成的子环。这是  $\mathbf{C}$  的包含  $\alpha$  的最小子环，它可以用一般方式来刻画。如果一个环包含  $\alpha$ ，则它包含  $\alpha$  的所有正幂，因为它关于乘法封闭。它也包含这些幂的和与差，而且还包含 1。因此它包含每一个可以表示为  $\alpha$  的幂的整数组合的复数  $\beta$ ，或换种说法，可由整系数的关于  $\alpha$  的多项式来表示：

$$\mathbf{Z}[\alpha] = \{a_n \alpha^n + \cdots + a_1 \alpha + a_0 \mid a_i \in \mathbf{Z}\}$$

另外，所有这样的数关于加、减、乘运算封闭，且它包含 1。故它是由  $\alpha$  生成的子环。

在多数情形下， $\mathbf{Z}[\alpha]$  不表示复平面上的格点。例如，环  $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{2}\right]$  由可以表示成整系数的关于  $\frac{1}{2}$  的多项式的那些有理数构成。这些有理数可以简单描述为分母为 2 的幂的数，它们形成了实数轴上的一个稠密子集。

**注** 一个复数  $\alpha$  是代数元，如果它是某个非零整系数多项式的根，即如果形如 (11.1.2) 的某个表达式值为零。若  $\alpha$  不是任何整系数多项式的根，则  $\alpha$  称为超越元。数  $e$  和  $\pi$  是超越元，尽管这点很难证明。

当  $\alpha$  是超越元时，两个不同的多项式表达式 (11.1.2) 代表不同的复数。则环  $\mathbf{Z}[\alpha]$  中的元素与整系数多项式  $p(x)$  通过规则  $p(x) \mapsto p(\alpha)$  形成双射。当  $\alpha$  是一个代数元，则有许许多多多项式表达式代表同一个复数。代数数的几个例子有： $i+3$ ， $\frac{1}{7}$ ， $7+\sqrt[3]{2}$  和  $\sqrt{3}+\sqrt{-5}$ 。



环的定义与域(3.2.2)的定义类似,唯一的差别在于乘法不要求有逆元:

**【11.1.3】定义**(+、-、 $\times$ 、1) 一个环  $R$  是一个具有两种合成法则 + 和  $\times$  (称为加和乘) 的集合, 此集合满足下面的公理:

(a) 对于合成法则 +,  $R$  是一个阿贝尔群, 记为  $R^+$ . 它的单位元用 0 表示.

(b) 乘法是交换的和结合的, 且有单位元, 记作 1.

(c) 分配律: 对所有  $a, b, c \in R$ ,  $(a+b)c=ac+bc$ .

环的子环是一个子集, 该子集对环的加、减、乘运算是封闭的, 且包含元素 1.

**注意** 存在一个相关的概念——非交换环——一种满足(11.1.3)中除关于乘法的交换律外其他所有公理的代数结构. 所有  $n \times n$  实矩阵的集合就是非交换环的一个例子. 由于我们不打算研究非交换环, 因此说到“环”就是指“交换环”.

除了  $\mathbb{C}$  的子环外, 最重要的环是多项式环. 一个系数在环  $R$  上的关于  $x$  的多项式具有形式

**【11.1.4】** 
$$a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$

其中  $a_i \in R$ . 这些多项式的集合构成一个环, 我们将在下一节讨论.

另一个例子: 关于实变量  $x$  的实值连续函数的集合  $\mathcal{R}$  在如下定义的加法和乘法下构成一个环:  $[f+g](x)=f(x)+g(x)$  与  $[f \cdot g](x)=f(x)g(x)$ .

存在只有一个元素 0 的环, 称为零环. 在域的定义(3.2.2)中, 集合  $F^\times$  通过删除 0 得到一个包含单位元 1 的群. 故在域中 1 不等于 0. 关系  $1=0$  在环中并不排除这种可能, 但这只在下面情况下发生:

**【11.1.5】命题** 满足关系  $1=0$  的环只有零环.

**证明** 首先注意  $0a=0$  对环  $R$  的每个元素  $a$  成立. 其证明与向量空间中的证明类似:  $0=0a-0a=(0-0)a=0a$ . 假设在  $R$  中  $1=0$ , 且令  $a$  为  $R$  中任意元, 则  $a=1a=0a=0$ .  $R$  中仅有的元素为 0. ■

324

虽然环中的元素不要求有乘法逆元, 但特别的元素可以有逆元, 如果逆元存在的话, 则逆元是唯一的.

**注** 一个环的单位是有乘法逆元的元素.

整数环的单位是 1 和 -1, 高斯整数环的单位为  $\pm 1$  和  $\pm i$ . 实多项式环  $\mathbb{R}[x]$  的单位是非零常数多项式. 域是满足  $1 \neq 0$  且每个非零元是单位的环.

环的恒等元 1 总是一个单位, 当指  $R$  中“这个”单位元时, 就是恒等元. 选用模糊的术语“单位”太糟糕了, 但也来不及改用别的术语了.

## 第二节 多项式环

一个系数在环  $R$  中的多项式是变量  $x$  的幂的(有限)线性组合:

**【11.2.1】** 
$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

此处系数  $a_i \in R$ . 这种表达式有时称为形式多项式, 以区别于多项式函数. 每个实系数的

形式多项式确定实数集合上的一个多项式函数. 但我们运用多项式这个词时指的是形式多项式.

系数在环  $R$  中的多项式的集合记作  $R[x]$ . 因此  $\mathbf{Z}[x]$  表示整系数多项式的集合——整多项式集.

单项式  $x^i$  被看成是独立的. 故如果

$$\text{【11.2.2】} \quad g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

是另一个系数在  $R$  中的多项式, 则  $f(x) = g(x)$  当且仅当  $a_i = b_i$  对所有  $i = 0, 1, 2, \dots$  成立.

一个非零多项式的次数记作  $\deg f$ , 它是使得  $x^n$  的系数  $a_n \neq 0$  的最大整数  $n$ . 一个零次多项式称为常数多项式. 虽然零多项式也是常数多项式, 但它的次数没有定义.

多项式的最高次的非零系数叫首项系数, 首一多项式就是首项系数为 1 的多项式.

一个多项式的某些系数可能为 0, 这便产生了一种恼人的情况. 我们必须丢掉系数为 0 的项, 故多项式  $f(x)$  可以有多种表达方式. 很恼人是因为这不是我们的兴趣点. 避免混淆的一种方法是想象列出了所有单项式的系数, 无论系数是否为 0. 这使得可以有效验证环的公理. 故为了定义环运算, 我们将一个多项式记作

$$\text{【11.2.3】} \quad f(x) = a_0 + a_1 x + a_1 x^2 + \cdots$$

此处系数  $a_i \in R$  且只有有限多个  $a_i$  不等于 0. 这个多项式由其系数  $a_i$  所成的向量(或序列)确定:

$$\text{【11.2.4】} \quad a = (a_0, a_1, \dots)$$

此处  $a_i \in R$ , 但只有有限个  $a_i$  为零. 每个这样的向量对应着一个多项式.

当  $R$  是一个域时, 这些无限多个向量构成一个向量空间  $Z$ , 此向量空间有如(3.7.2)中定义的无限基  $e_i$ . 向量  $e_i$  对应于单项式  $x^i$ , 且单项式构成所有多项式所成的空间的一组基.

多项式的加法和乘法的定义仿照我们熟悉的多项式函数的运算. 如果  $f(x)$  和  $g(x)$  是多项式, 则用上面的记号, 它们的和是

$$\text{【11.2.5】} \quad f(x) + g(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots = \sum_k (a_k + b_k)x^k$$

此处记号  $a_i + b_i$  指的是环  $R$  中的加法. 故如果把一个多项式看成一个向量, 其加法就是向量加法:  $a + b = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \dots)$ .

多项式  $f$  和  $g$  的积是通过展开其积来计算的:

$$\text{【11.2.6】} \quad f(x)g(x) = (a_0 + a_1 x + \cdots)(b_0 + b_1 x + \cdots) = \sum_{i,j} a_i b_j x^{i+j}$$

此处积  $a_i b_j$  按环  $R$  中的乘法计算. 存在有限多个非零系数  $a_i b_j$ . 这是个正确的公式, 但右边不是如(11.2.3)中的标准形式, 因为同样的单项式  $x^n$  出现多次——对每一对下标  $i, j$ ,  $i + j = n$  出现一次. 所以右边这些项必须合并. 这就导出定义

$$\text{【11.2.7】} \quad f(x)g(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \cdots$$

$$p_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$$

$$p_0 = a_0 b_0, \quad p_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0, \quad p_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0, \dots$$

每个  $p_k$  用环中的合成法则计算. 然而, 做计算时, 我们往往暂时推迟合并同类项.

**【11.2.8】命题** 在多项式集合  $R[x]$  上存在唯一的具有如下性质的交换环结构:

- 多项式的加法由(11.2.5)定义.
- 多项式的乘法由(11.2.7)定义.
- 环  $R$  当被看作常数多项式时成为  $R[x]$  的子环.

326

由于多项式代数是大家所熟悉的, 这个命题的证明没有令人感兴趣的特征, 故此省略. 带余除法是多项式的一个重要运算.

**【11.2.9】命题(带余除法)** 令  $R$  是一个环, 令  $f$  是首一多项式,  $g$  为任意多项式, 两个多项式的系数均在  $R$  中. 则在  $R[x]$  中存在唯一确定的多项式  $q$  和  $r$  使得

$$g(x) = f(x)q(x) + r(x)$$

且对余式  $r$ , 如果不为零, 则  $\deg r < \deg f$ . 此外,  $f$  在  $R[x]$  中整除  $g$  当且仅当  $r=0$ .

此命题的证明来自在学校中学过的多项式的除法算法.

**【11.2.10】推论** 只要  $f$  的首项系数为单位, 就可以做带余除法运算. 特别地, 每当系数环是一个域且  $f \neq 0$ , 便可以做带余除法运算.

如果首项系数是一个单位  $u$ , 则可以从  $f$  中提取出这个因式.

然而, 在整多项式环  $\mathbf{Z}[x]$  中我们不能用  $2x+1$  去除  $x^2+1$ .

**【11.2.11】推论** 令  $g(x)$  是  $R[x]$  中一个多项式, 且令  $\alpha$  是  $R$  中一个元素, 则  $g(x)$  用  $x-\alpha$  去除所得的余数为  $g(\alpha)$ . 因此,  $x-\alpha$  在  $R[x]$  中整除  $g$  当且仅当  $g(\alpha)=0$ .

这个推论只要将  $x=\alpha$  代入方程  $g(x)=(x-\alpha)q(x)+r$ , 并注意到  $r$  是一个常数就能证明.

多项式是环论的基础, 我们也将用到多个变量的多项式. 在定义上没有本质的改变.

**注** 一个单项式是多个变量  $x_1, x_2, \dots, x_n$  的形式积, 它具有下面的形式:

$$x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n}$$

此处指数  $i_i$  是非负整数. 单项式的次数有时称为总次数, 是和  $i_1 + \cdots + i_n$ .

一个  $n$  元组  $(i_1, \dots, i_n)$  称为一个多重指标, 用向量记号  $i = (i_1, \dots, i_n)$  表示多重指标是很方便的. 用多重指标记号, 我们可以将一个单项式记为  $x^i$ :

**【11.2.12】** 
$$x^i = x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n}$$

327

单项式  $x^0$  用 1 表示, 其中  $0 = (0, \dots, 0)$ . 一个系数在环  $R$  中的多个变量  $x_1, \dots, x_n$  的多项式是有限多个系数在  $R$  中的单项式的线性组合. 借助于多重指标记号, 一个多项式  $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  恰可用一种方式表示:

**【11.2.13】** 
$$f(x) = \sum_i a_i x^i$$

此处  $i$  取遍所有多重指标集  $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ , 系数  $a_i \in R$ , 且只有有限多个系数不为零.

若一个多项式中每个单项式的系数非零且(总)次数是  $d$ , 这样的多项式就叫做齐次多项式.

用多重指标记号, 公式(11.2.5)和(11.2.7)定义了多变量多项式的加法与乘法, 且命题 11.2.8 的类似结果成立. 然而, 带余除法则需要慎重. 在后面会回到这一点(见推论 11.3.9).

系数在  $R$  中的多项式的环通常用下面的符号之一表示:

**[11.2.14]**  $R[x_1, \dots, x_n]$  或  $R[x]$

其中符号  $x$  理解为变量  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  的集合. 当没有引入变量的集合时,  $R[x]$  表示一个变量的多项式环.

### 第三节 同态与理想

一个环同态  $\varphi: R \rightarrow R'$  是从一个环  $R$  到另一个环  $R'$  的映射, 它与合成法则相容, 并且从  $R$  到  $R'$  保持单位元 1, 即这样一个映射, 对任意  $a, b \in R$ , 满足:

**[11.3.1]**  $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b), \quad \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b), \quad \varphi(1) = 1$

映射

**[11.3.2]**  $\varphi: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{F}_p$

将一个整数映射到它模  $p$  的同余类, 这个映射  $\varphi$  是一个环同态.

环同构是一个双射同态, 且如果存在  $R$  到  $R'$  的同构, 则称这两个环是同构的. 我们经常用记号  $R \approx R'$  表示环  $R$  与  $R'$  同构.

关于(11.3.1)的第 3 个条件: 假设同态  $\varphi$  对加法是相容的是指它是  $R$  的加群  $R^+$  到加群  $R'^+$  的同态. 一个群同态把单位元映射到单位元, 故  $\varphi(0) = 0$ . 但是从乘法的相容性不能得出  $\varphi(1) = 1$ , 所以这个条件必须单独列出来. ( $R$  关于乘法  $\times$  不是群.) 例如, 零映射  $R \rightarrow R'$  将  $R$  中每个元素都映射到  $R'$  中的零元, 这个映射对加法和乘法是相容的, 但它并不把  $R$  中的单位元映射到  $R'$  中的单位元, 除非在  $R'$  中  $1=0$ . 故零映射不能叫做环同态, 除非  $R'$  是零环(参见(11.1.5)).

最重要的环同态由计算多项式的值得到. 实多项式在实数  $a$  的值定义一个同态:

**[11.3.3]**  $\mathbf{R}[x] \rightarrow \mathbf{R}, \quad \text{映} \quad p(x) \rightsquigarrow p(a)$

328

也可以计算实多项式在某个复数(比如  $i$ )处的值, 得到一个同态  $\mathbf{R}[x] \rightarrow \mathbf{C}$ , 它映  $p(x) \rightsquigarrow p(i)$ .

多项式求值的一般法则是:

**[11.3.4] 命题(替换原则)** 令  $\varphi: R \rightarrow R'$  是一个环同态, 且令  $R[x]$  是系数在  $R$  中的多项式环.

(a) 令  $\alpha$  是  $R'$  中的一个元素, 则存在唯一的同态  $\Phi: R[x] \rightarrow R'$ , 它在常数多项式上的作用与映射  $\varphi$  相同, 且映  $x \rightsquigarrow \alpha$ .

(b) 更一般地, 给定  $R'$  中的元素  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ , 存在唯一一个同态  $\Phi: R[x_1, x_2, \dots, x_n] \rightarrow R'$ , 它是从  $n$  个变量的多项式环到  $R'$  的映射, 与  $\varphi$  在常数多项式上的作用相同, 且映  $x_v \rightsquigarrow \alpha_v$ , 其中  $v=1, 2, \dots, n$ .

**证明** (a) 将  $a \in R$  在  $\varphi$  下的像  $\varphi(a)$  记作  $a'$ . 利用  $\Phi$  是在  $R$  上限制到  $\varphi$  的同态并映  $x$  到  $\alpha$  的事实, 可以看到  $\Phi$  通过映

$$\text{【11.3.5】} \quad \Phi(\sum a_i x^i) = \sum \Phi(a_i) \Phi(x)^i = \sum a'_i \alpha^i$$

作用在多项式  $f(x) = \sum a_i x^i$  上. 换言之,  $\Phi$  如同  $\varphi$  一样作用在一个多项式的系数上, 并将  $x$  替换为  $\alpha$ .

因为这个公式刻画了  $\Phi$ , 所以我们已经证明了代入同态的唯一性. 为了证明这样的同态的存在性, 取上述公式定义的  $\Phi$ , 并证明  $\Phi$  是  $R[x] \rightarrow R'$  的环同态. 显然  $\Phi(1) = 1$ , 且容易验证对多项式加法的相容性. 关于乘法的相容性用公式(11.2.6)检验:

$$\begin{aligned} \Phi(fg) &= \Phi(\sum a_i b_j x^{i+j}) = \sum \Phi(a_i b_j x^{i+j}) = \sum_{i,j} a'_i b'_j \alpha^{i+j} \\ &= (\sum_i a'_i \alpha^i) (\sum_j b'_j \alpha^j) = \Phi(f) \Phi(g) \end{aligned}$$

采用多重指标记号, (b) 的证明与 (a) 的证明相同. ■

这里是一个替换原则的简单例子, 其中系数环  $R$  变了. 令  $\psi: R \rightarrow S$  是一个环同态. 将  $\psi$  与  $S$  的作为多项式环  $S[x]$  的子环的包含映射加以合成, 得到同态  $\varphi: R \rightarrow S[x]$ . 替换原则断言, 存在  $\varphi$  的到一个同态  $\Phi: R[x] \rightarrow S[x]$  的唯一扩张映  $x \rightsquigarrow x$ . 这个映射作用在多项式的系数上, 而保持变量  $x$  不变. 如果用  $a'$  表示  $\psi(a)$ , 则  $\varphi$  把一个多项式  $a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$  映射为  $a'_n x^n + \dots + a'_1 x + a'_0$ .

一个特别有趣的情形是  $\varphi$  是同态  $\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{F}_p$ , 映整数  $a$  到它的剩余  $\bar{a}$  模  $p$ . 这个映射扩展为一个同态  $\Phi: \mathbf{Z}[x] \rightarrow \mathbf{F}_p[x]$ , 定义如下:

$$\text{【11.3.6】} \quad f(x) = a_n x^n + \dots + a_0 \rightsquigarrow \bar{a}_n x^n + \dots + \bar{a}_0 = \bar{f}(x)$$

此处  $\bar{a}_i$  是  $a_i$  模  $p$  的剩余类, 自然称多项式  $\bar{f}(x)$  为  $f(x)$  模  $p$  的剩余.

另一个例子: 令  $R$  是一个环, 且令  $P$  表示多项式环  $R[x]$ , 可以用替换原则来构造一个同构

$$\text{【11.3.7】} \quad R[x, y] \rightarrow P[y] = (R[X])[y]$$

这在下面的命题 11.3.8 中给出陈述和证明. 其定义域为两个变量  $x, y$  的多项式环; 值域是关于  $y$  的多项式环, 多项式系数是关于  $x$  的多项式. 这些环是同构的, 该论断是一个多项式  $f(x, y)$  按照  $y$  的次数合并同类项的形式的形式化. 例如,

$$x^4 y + x^3 - 3x^2 y + y^2 + 2 = y^2 + (x^4 - 3x^2) y + (x^3 + 2)$$

这个程序很有用. 例如, 可以把一个多项式最终写成一个关于变量  $y$  的首一多项式, 如上例的情形. 如果这样, 就可作带余除法(见下面的推论 11.3.9).

**【11.3.8】命题** 令  $x = (x_1, \dots, x_m)$  和  $y = (y_1, \dots, y_n)$  表示变量的集合, 则存在唯一一个同构  $R[x, y] \rightarrow R[x][y]$ , 它在  $R$  上是恒等映射, 且将变量映射到自身.

这是很基础的, 但直接验证这两个环上乘法的相容性是枯燥的.

**证明** 注意到  $R$  是  $R[x]$  的子环,  $R[x]$  是  $R[x][y]$  的子环, 故  $R$  也是  $R[x][y]$  的子环. 令  $\varphi$  是  $R$  到  $R[x][y]$  的包含映射. 替换原则告诉我们存在唯一的同态  $\Phi: R[x, y] \rightarrow R[x][y]$ , 这个同态扩展了  $\varphi$  并映射  $x_u$  与  $y_v$  到想到的地方. 故我们可以让变量映射到自身. 所构造的  $\Phi$  要求是一个同构. 不难看出  $\Phi$  是一个双射. 证明此点的一种方法是再次应用替换原则来定义一个逆映射. ■

**【11.3.9】推论** 令  $f(x, y)$  和  $g(x, y)$  是两个变量的多项式, 是  $R[x, y]$  中的元素. 假设当视为关于  $y$  的多项式时,  $f$  是首一的  $m$  次多项式, 则存在唯一确定的多项式  $q(x, y)$  和  $r(x, y)$  使得  $g = fq + r$ , 且使得若  $r(x, y) \neq 0$ , 则它关于  $y$  的次数  $< m$ .

此推论由命题 11.2.9 和 11.3.8 可得.

另一个容易刻画同态的情形是当定义域是整数环的时候.

**【11.3.10】命题** 令  $R$  为一个环, 则恰好存在一个从整数环  $\mathbf{Z}$  到环  $R$  的同态  $\varphi: \mathbf{Z} \rightarrow R$ . 这个映射定义为: 对  $n \geq 0$ ,  $\varphi(n) = 1 + \cdots + 1$  ( $n$  项) 且  $\varphi(-n) = -\varphi(n)$ .

**简略证明** 令  $\varphi: \mathbf{Z} \rightarrow R$  是一个同态. 由同态的定义,  $\varphi(1) = 1$  且  $\varphi(n+1) = \varphi(n) + \varphi(1)$ . 递归定义刻画了  $\varphi$  作用于自然数的情形以及如果  $n > 0$  则  $\varphi(-n) = -\varphi(n)$  且  $\varphi(0) = 0$ , 由此唯一确定了  $\varphi$ . 故它是仅有的一个能成为同态的映射  $\mathbf{Z} \rightarrow R$ , 不难证明仅有一个. 要给出形式上的证明, 可回到整数加法和乘法的定义(参见附录). ■

330

命题 11.3.10 可以把一个整数的像等同于任意一个环  $R$ . 例如: 我们解释符号 3 为  $R$  中的元素  $1+1+1$ .

**注意** 令  $\varphi: R \rightarrow R'$  是环同态.  $\varphi$  的核是  $R$  中映射到零的元素的集合:

**【11.3.11】** 
$$\ker \varphi = \{s \in R \mid \varphi(s) = 0\}$$

这和将  $\varphi$  视为加群的同态  $R^+ \rightarrow R'^+$  得到的核是一样的. 所以, 关于群同态核的性质适用于此. 例如,  $\varphi$  是单射当且仅当  $\ker \varphi = \{0\}$ .

正如你将回想到的, 一个群同态的核不仅是一个子群, 而且是一个正规子群. 同样, 一个环同态的核在加法运算下封闭, 它还有比在乘法运算下封闭更强的性质:

**【11.3.12】** 如果  $s \in \ker \varphi$ , 则对任意  $r \in R$ ,  $rs \in \ker \varphi$

因为如果  $\varphi(s) = 0$ , 则  $\varphi(rs) = \varphi(r)\varphi(s) = \varphi(r) \cdot 0 = 0$ .

这个性质被抽象到理想这个概念中.

**【11.3.13】定义** 环  $R$  的一个理想  $I$  是  $R$  的满足下列性质的非空子集:

- $I$  在加法下封闭.
- 如果  $s \in I$ ,  $r \in R$ , 则  $rs \in I$ .

环同态的核是一个理想.

这个奇怪的术语“理想”是以前用在数论中的“理想元素”这个短语的缩写. 在第十三章我们会看到这个名称是如何产生的. 一个好的办法(可能是更好的办法)就是将理想的定义看成与下面的公式化表达等价:

**【11.3.14】**  $I \neq \emptyset$  (空集) 且线性组合  $r_1 s_1 + \cdots + r_k s_k \in I$ , 其中  $s_i \in I, r_i \in R$ .

注 任何环  $R$  中, 一个特定元素  $a$  的倍数构成一个理想称为由  $a$  生成的主理想. 一个元素  $b \in R$  属于这个理想当且仅当  $b$  是  $a$  的倍数, 即当且仅当在  $R$  中  $a$  整除  $b$ .

有几种表示主理想的记号:

**[11.3.15]**  $(a) = aR = Ra = \{ra \mid r \in R\}$

环  $R$  本身是主理想(1), 鉴于此, (1)称为单位理想. 这是仅有的包含环的单位的理想. 只包含元素零的集合是主理想(0), 称为零理想. 不是单位理想也不是零理想的理想称为真理想.

331

每个理想  $I$  满足子环的条件, 除非  $I$  是整个环, 否则  $R$  的单位元  $1 \notin I$ . 如果  $I=R$ , 则  $I$  并不是我们所说的子环.

**[11.3.16] 例**

(a) 令  $\varphi$  是同态  $\mathbf{R}[x] \rightarrow \mathbf{R}$ , 定义为用实数 2 代替  $x$ . 它的核是所有以 2 为根的多项式的集合, 可刻画为能被  $x-2$  整除的多项式的集合. 这是一个主理想, 可记为  $(x-2)$ .

(b) 令  $\Phi: \mathbf{R}[x, y] \rightarrow \mathbf{R}[t^2, t^3]$  是一个同态, 其在实数上保持不变, 且映  $x \rightsquigarrow t^2, y \rightsquigarrow t^3$ . 则映  $g(x, y) \rightsquigarrow g(t^2, t^3)$ . 多项式  $f(x, y) = y^2 - x^3$  是  $\Phi$  的核. 我们将证明核是由  $f$  生成的主理想  $(f)$ , 即如果  $g(x, y)$  是一个多项式且  $g(t^2, t^3) = 0$ , 则  $f$  整除  $g$ . 为证明此结论, 将  $f$  视为系数为关于  $x$  的多项式的关于  $y$  的多项式(参见(11.3.8)).  $f$  是一个关于  $y$  的首一多项式, 故可做带余除法:  $g = fq + r$ , 此处  $q$  和  $r$  是多项式, 余式是  $r$ , 如果  $r \neq 0$ , 则它关于  $y$  的次数至多为 1. 我们将余式写成关于  $y$  的多项式:  $r(x, y) = r_1(x)y + r_0(x)$ . 如果  $g(t^2, t^3) = 0$ , 则  $g$  和  $fq \in \ker \Phi$ , 故  $r \in \ker \Phi$ :  $r(t^2, t^3) = r_1(t^2)t^3 + r_0(t^2) = 0$ .  $r_0(t^2)$  中的单项式有偶数次幂, 而  $r_1(t^2)t^3$  中的单项式有奇数次幂. 因此为使  $r(t^2, t^3) = 0$ ,  $r_0(x)$  与  $r_1(x)$  必须均为零. 由于余式  $r = 0$ , 故  $f$  整除  $g$ . ■

用记号  $(a)$  表示主理想是很方便的, 但如果不指出是哪个环的理想, 就会出现歧义. 例如,  $(x-2)$  可代表  $\mathbf{R}(x)$  的理想, 也可代表  $\mathbf{Z}(x)$  的理想, 依情况而定. 将几个环一起讨论时, 最好用不同的表示记号.

注 由环  $R$  的元素集合  $\{a_1, \dots, a_n\}$  生成的理想  $I$  是包含这些元素的最小理想. 它可以描述为所有形如(11.3.17)的线性组合的集合.

**[11.3.17]**  $r_1 a_1 + \dots + r_n a_n$

其中系数  $r_i \in R$ . 这个理想常记作  $(a_1, \dots, a_n)$ :

**[11.3.18]**  $(a_1, \dots, a_n) = \{r_1 a_1 + \dots + r_n a_n \mid r_i \in R\}$

例如, 映  $f(x)$  为  $f(0) \pmod{p}$  的剩余的同态  $\varphi: \mathbf{Z}[x] \rightarrow \mathbf{F}_p$  的核  $K$  是  $\mathbf{Z}[x]$  中由  $p$  和  $x$  生成的理想  $(p, x)$ . 我们验证如下: 首先,  $p, x \in K$ , 故  $(p, x) \subset K$ . 要证明  $K \subset (p, x)$ , 令  $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$  是整多项式, 则  $f(0) = a_0$ . 如果  $a_0 \equiv 0 \pmod{p}$ , 即  $a_0 = bp$ , 则  $f$  是  $p$  和  $x$  的一个线性组合  $bp + (a_n x^{n-1} + \dots + a_1)x$ . 故  $f \in (p, x)$ .

生成一个理想的元素个数可以任意多. 多项式环  $\mathbf{C}[x, y]$  的理想  $(x^3, x^2y, xy^2, y^3)$

由这样的多项式组成：多项式的每一项的次数至少是 3. 这个理想不能由少于 4 个元素生成.

在本节的其余部分，我们将理想描述为一些简单情形.

332

### 【11.3.19】命题

(a) 域仅有的理想是零理想与单位理想.

(b) 恰有两个理想的环是域.

**证明** 若一个域  $F$  的理想  $I$  包含一个非零元  $a$ ，且这个元是可逆的，则  $I$  包含  $a^{-1}a = 1$ ，因此这个理想为单位理想.  $F$  仅有的理想为  $(0)$  和  $(1)$ .

假设  $R$  恰有两个理想. 域区别于环的性质是  $1 \neq 0$  且  $R$  的每个非零元  $a$  有乘法逆元. 我们已经看到  $1=0$  只发生在零环的情形. 零环只有一个理想，即零理想. 由于我们的环有两个理想，故在  $R$  中  $1 \neq 0$ . 两个理想  $(1)$  和  $(0)$  不同，故它们是  $R$  的仅有的两个理想.

为证明  $R$  的每个非零元素  $a$  有逆元，考虑主理想  $(a)$ . 因为  $(a)$  包含元素  $a$ ，故  $(a) \neq (0)$ ，因此  $(a) = (1)$ .  $(a)$  的元素是  $a$  的倍数，故  $1$  为  $a$  的倍数，因此  $a$  是可逆的. ■

**【11.3.20】推论** 每个从一个域  $F$  到非零环  $R$  的同态  $\varphi: F \rightarrow R$  是一个单射.

**证明**  $\ker \varphi$  是  $F$  的一个理想. 故由命题 11.3.19 知， $\ker \varphi = (0)$  或  $(1)$ . 如果  $\ker \varphi = (1)$ ，则  $\varphi$  将是零映射. 但当  $R$  是非零环时，零映射不是同态. 因此  $\ker \varphi = (0)$ ，故  $\varphi$  是单射. ■

**【11.3.21】推论** 整数环的理想是  $\mathbf{Z}^+$  的子群，且它们是主理想.

整数环  $\mathbf{Z}$  的一个理想是加群  $\mathbf{Z}^+$  的一个子群，在 (2.3.3) 之前已经证明了  $\mathbf{Z}^+$  的每个子群具有形式  $\mathbf{Z}n$ .

关于  $\mathbf{Z}^+$  的子群有形式  $\mathbf{Z}n$  的证明可改编到域上的多项式环  $F[x]$ .

**【11.3.22】命题** 域  $F$  上关于一个变量  $x$  的多项式环  $F[x]$  的每一个理想是一个主理想.  $F[x]$  上的一个非零理想  $I$  由它所包含的次数最低的首一多项式生成.

**证明** 令  $I$  为  $F[x]$  的一个理想. 零理想是主理想，故假设  $I$  不是零理想. 找  $\mathbf{Z}$  的一个非零子群的生成元的第一步是选取其中的最小正数. 这里替换成选取  $I$  中次数最低的非零多项式  $f$ . 由于  $F$  是一个域，故可以取  $f$  为首一的. 我们断言  $I = (f)$  是  $f$  的多项式倍数的主理想. 由于  $f \in I$ ，故  $f$  的任意倍数也属于  $I$ ，因此  $(f) \subset I$ . 要证明  $I \subset (f)$ ，选取元素  $g \in I$ ，应用带余除法写成  $g = fq + r$ ，其中如果  $r \neq 0$ ，则  $\deg r < \deg f$ . 由于  $g$  与  $f$  均属于  $I$ ，故  $g - fq = r \in I$ . 由于  $f$  是  $I$  中次数最小的非零多项式，且只有  $r = 0$ ，因此  $f$  整除  $g$ ，故  $g \in (f)$ . ■

333

如果  $f_1$  与  $f_2$  均为  $I$  中两个次数最低的首一多项式，则它们的差在  $I$  中的次数小于  $n$ ，故必为零多项式. 因此最低次的首一多项式在  $I$  中是唯一的. ■

**【11.3.23】例** 令  $\gamma = \sqrt[3]{2}$  是 2 的实三次方根，且令  $\phi: \mathbf{Q}[x] \rightarrow \mathbf{C}$  是一个代入映射，映  $x \rightsquigarrow \gamma$ . 此映射的核是一个主理想，由  $\mathbf{Q}[x]$  中有一个根为  $\gamma$  (11.3.22) 的次数最低的首一多项式生



成. 多项式  $x^3-2$  在核中, 因为  $\sqrt[3]{2}$  不是一个有理数, 故该多项式不能写成两个有理系数的非常数多项式之积  $f=gh$ . 故它是核中次数最低的多项式, 因此它生成这个核, 即  $\ker\Phi=(x^3-2)$ . ■

我们限制映射  $\Phi$  到整数环  $\mathbf{Z}[x]$  上, 得到一个同态  $\Phi': \mathbf{Z}[x] \rightarrow \mathbf{C}$ . 下面的引理证明  $\ker\Phi'$  是  $\mathbf{Z}[x]$  的主理想, 由同一个多项式  $f$  生成.

**【11.3.24】引理** 令  $f$  是一个首一的整多项式, 且令  $g$  是另一个整多项式. 如果  $f$  在  $\mathbf{Q}[x]$  上整除  $g$ , 则  $f$  在  $\mathbf{Z}[x]$  上整除  $g$ .

**证明** 由于  $f$  是首一的, 故可在  $\mathbf{Z}[x]$  上做带余除法:  $g=fq+r$ . 这个式子在环  $\mathbf{Q}[x]$  上也成立, 且  $\mathbf{Q}[x]$  上的带余除法给出同样的结果. 在  $\mathbf{Q}[x]$  上,  $f$  整除  $g$ , 因此  $r=0$ , 且在  $\mathbf{Z}[x]$  上  $f$  整除  $g$ . ■

下面推论的证明类似于证明整数环中存在最大公因式((2.3.5), 也可参见(12.2.8)).

**【11.3.25】推论** 令  $R$  表示域  $F$  上一个变量的多项式环  $F[x]$ , 且令  $f, g \in R$ , 均非零. 它们的最大公因式  $d(x)$  是唯一的首一多项式, 它生成理想  $(f, g)$ .  $d(x)$  有下列性质:

- (a)  $Rd = Rf + Rg$ .
- (b)  $d$  整除  $f$  和  $g$ .
- (c) 如果多项式  $e=e(x)$  整除  $f$  和  $g$ , 则  $e(x)$  整除  $d$ .
- (d) 存在多项式  $p$  和  $q$  使得  $d = pf + qg$ .

环  $R$  的特征的定义与域的特征的定义一样. 它是一个能生成同态  $\varphi: \mathbf{Z} \rightarrow R$  (11.3.10) 的核的非负整数  $n$ . 如果  $n=0$ , 则环  $R$  的特征为 0, 这意味着  $R$  中 1 的任何整数倍均不为 0. 否则  $n$  是  $R$  中使得“ $n$  倍的 1”等于 0 的最小正整数. 一个环的特征可以是任何非负整数.

## 第四节 商 环

令  $I$  是环  $R$  的理想.  $R^+$  中加法子群的陪集  $I^+$  是子集  $a+I$ . 陪集的集合  $\bar{R} = R/I$  在加法运算下是一个群. 对于环, 也有类似的结论:

334

**【11.4.1】定理** 令  $I$  是环  $R$  的理想. 在  $I$  的加法陪集的集合  $\bar{R}$  上存在唯一的环结构使得映射  $\pi: R \rightarrow \bar{R}$  映  $a \rightsquigarrow \bar{a} = [a+I]$ , 该映射是一个环同态.  $\pi$  的核是理想  $I$ .

如商群中一样, 映射  $\pi$  称为典范映射,  $\bar{R}$  叫做商环. 元素  $a$  的像  $\bar{a}$  叫做元素的剩余.

**证明** 对于整数环已经进行过证明了(见第二章第九节). 我们要在  $\bar{R}$  上加上一个环结构, 如果只考虑加法运算而不考虑乘法, 则  $I$  是  $R^+$  的一个正规子群, 对此, (2.12.2) 已经给出了证明. 剩下的就是定义乘法, 然后验证环的公理成立, 再证明  $\pi$  是一个同态. 令  $\bar{a} = [a+I]$  与  $\bar{b} = [b+I]$  为  $\bar{R}$  中的元素. 定义  $\bar{a}\bar{b} = [ab+I]$ . 积的集合

$$P = (a+I)(b+I) = \{rs \mid r \in a+I, s \in b+I\}$$

不总是  $I$  的陪集. 然而, 如同整数环的情形,  $P \subset ab+I$ . 如果记  $r=a+u$ ,  $s=b+v$ , 其中  $u, v \in I$ , 则

$$(a+u)(b+v) = ab + (av + bu + uv)$$

由于  $I$  是一个理想, 且包含  $u, v$ , 则  $av+bu+uv \in I$ . 这是定义积陪集所需要的: 这个陪集包含积的集合. 由于陪集划分  $R$ , 故陪集  $ab+I$  是唯一确定的.

定理其他部分的证明仿照第二章第九节可得. ■

和群中一样, 我们经常省略商环  $\bar{R}$  的代表元  $\bar{a}$  上面的横线, 记住“在  $\bar{R}$  上  $a=b$ ”意味着“ $\bar{a}=\bar{b}$ ”.

下面的定理也和我们在群中看到的定理类似:

**【11.4.2】定理(商环的映射性质)** 令  $f:R \rightarrow R'$  是环同态,  $\ker f=K$  且令  $I$  是  $R$  的另一个理想. 令  $\pi:R \rightarrow \bar{R}$  是  $R$  到  $\bar{R}=R/I$  的典范映射.

(a) 如果  $I \subset K$ , 则存在唯一同态  $\bar{f}:\bar{R} \rightarrow R'$  使得  $\bar{f}\pi=f$ :

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{f} & R' \\ & \searrow \pi & \nearrow \bar{f} \\ & & \bar{R}=R/I \end{array}$$

(b) (第一同构定理) 如果  $f$  是满射且  $I=K$ , 则  $\bar{f}$  是一个同构.

第一同构定理是我们确定商环的基本方法, 然而, 它并不常用. 在许多情形中, 商环是新的环, 这就是商结构重要的原因. 例如, 环  $\mathbf{C}[x, y]/(y^2-x^3+1)$  就完全不同于至今我们所看到的任何一个环. 它的元素是一个椭圆曲线上的函数(参加[Silverman]).

335

环的对应定理刻画了环的理想与商环之间的关系.

**【11.4.3】定理(对应定理)** 令  $\varphi:R \rightarrow \mathcal{R}$  是一个满射环同态, 且  $\ker \varphi=K$ . 则存在  $\mathcal{R}$  的全部理想的集合与  $R$  的包含  $K$  的理想的集合之间的一个双射对应:

$$\{R \text{ 的包含 } K \text{ 的理想}\} \leftrightarrow \{\mathcal{R} \text{ 的理想}\}$$

这个对应定义如下:

- 如果  $I$  是  $R$  的理想, 且  $K \subset I$ , 则在  $\mathcal{R}$  中对应的理想为  $\varphi(I)$ .
- 如果  $\mathcal{I}$  是  $\mathcal{R}$  的一个理想, 则在  $R$  中对应的理想为  $\varphi^{-1}(\mathcal{I})$ .

如果  $R$  的理想  $I$  对应于  $\mathcal{R}$  的理想  $\mathcal{I}$ , 则商环  $R/I$  和  $\mathcal{R}/\mathcal{I}$  自然是同构的.

注意包含关系  $K \subset I$  是与映射性质中的包含关系相反的.

**对应定理的证明** 令  $\mathcal{I}$  是  $\mathcal{R}$  的一个理想, 令  $I$  是  $R$  的包含  $K$  的一个理想. 我们必须验证下面几点:

- $\varphi(I)$  是  $\mathcal{R}$  的理想.
- $\varphi^{-1}(\mathcal{I})$  是  $R$  的一个理想, 且包含  $K$ .
- $\varphi(\varphi^{-1}(\mathcal{I})) = \mathcal{I}$ , 且  $\varphi^{-1}(\varphi(I)) = I$ .
- $\varphi(I) = \mathcal{I}$ , 则  $R/I \approx \mathcal{R}/\mathcal{I}$ .

参考群的对应定理 2.10.5 的证明, 我们按顺序逐条验证. 我们已经看到了子群的像仍是子群. 故要证明  $\varphi(I)$  是  $\mathcal{R}$  的理想, 只需证明它对  $\mathcal{R}$  中的乘法封闭. 令  $\bar{r} \in \mathcal{R}$ , 令  $\bar{x} \in \varphi(I)$ .

则对于某个  $x \in I$ , 有  $\tilde{x} = \varphi(x)$ . 由于  $\varphi$  是满射, 故对某个  $r \in R$ , 有  $\tilde{r} = \varphi(r)$ . 由于  $I$  是一个理想, 故  $rx \in I$  且  $\tilde{r}\tilde{x} = \varphi(rx) \in \varphi(I)$ .

其次, 验证  $\varphi^{-1}(I)$  是  $R$  的包含  $K$  的理想. 无论  $\varphi$  是否为满射, 这个结论都是成立的. 记  $\varphi(a) = \tilde{a}$ . 由原像的定义,  $a \in \varphi^{-1}(I)$  当且仅当  $\tilde{a} \in I$ . 如果  $a \in \varphi^{-1}(I)$ ,  $r \in R$ , 则  $\varphi(ra) = \tilde{r}\tilde{a} \in I$  (因为  $I$  是一个理想), 因此  $ra \in \varphi^{-1}(I)$ .  $\varphi^{-1}(I)$  在加法下封闭和包含  $K$  已在 (2.10.4) 里证明.

第三个断言 (即对应的双射性) 从群同态的情形可得.

最后, 假设  $K \subset I$ , 其中  $I$  是  $R$  的理想, 对应于环  $R$  中的理想  $\mathcal{I}$ , 即  $\mathcal{I} = \varphi(I)$  且  $I = \varphi^{-1}(\mathcal{I})$ . 令  $\tilde{\pi}: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}/\mathcal{I}$  是典范映射, 令  $f$  表示合成映射  $\tilde{\pi}: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}/\mathcal{I}$ .  $\ker f = \{x \in \mathcal{R} \mid \tilde{\pi}\varphi(x) = 0\}$ , 即  $\varphi(x) \in \mathcal{I}$ , 或  $x \in \varphi^{-1}(\mathcal{I}) = I$ . 故  $\ker f = I$ . 将映射性质应用于映射  $f$  就给出了一个同态  $\bar{f}: \mathcal{R}/I \rightarrow \mathcal{R}/\mathcal{I}$ , 且第一同构定理断言  $\bar{f}$  是一个同构. ■

336

要应用对应定理, 了解环的理想是有益的. 下面的例子以一种最简单的情形说明了这一点, 其中两环之一是  $\mathbf{C}[t]$ . 我们将能够用到  $\mathbf{C}[t]$  的每个理想是主理想这一事实 (11.3.22).

#### 【11.4.4】例

(a) 令  $\varphi: \mathbf{C}[x, t] \rightarrow \mathbf{C}[t]$  是一个同态, 映  $x \rightsquigarrow t$  及  $y \rightsquigarrow t^2$ . 这是一个满射, 其核  $K$  是由  $y - x^2$  生成的  $\mathbf{C}[x, y]$  的一个主理想 (其证明与例 11.3.16 类似).

对应定理将  $\mathbf{C}[x, y]$  中包含  $y - x^2$  的理想  $I$  与  $\mathbf{C}[t]$  中的理想  $J$  通过  $J = \varphi(I)$  和  $I = \varphi^{-1}(J)$  联系起来, 此处  $J$  是由多项式  $p(t)$  生成的主理想. 令  $I_1$  表示  $\mathbf{C}[x, y]$  的由  $y - x^2$  和  $p(x)$  生成的理想. 则  $I_1$  包含  $K$ , 且它的像等于  $J$ . 对应定理断言  $I_1 = I$ . 多项式环  $\mathbf{C}[x, y]$  的包含  $y - x^2$  的每一个理想具有形式  $I = (y - x^2, p(x))$ , 其中  $p(x)$  为某个多项式.

(b) 用典范映射  $\pi: \mathbf{C}[t] \rightarrow R'$  确定商环  $R' = \mathbf{C}[t]/(t^2 - 1)$  的理想.  $\pi$  的核为主理想  $(t^2 - 1)$ . 令  $I$  是  $\mathbf{C}[t]$  的包含  $t^2 - 1$  的理想, 则  $I$  是由首一多项式  $f$  生成的主理想,  $t^2 - 1 \in I$  意味着  $f$  整除  $t^2 - 1$ .  $t^2 - 1$  的首一因子有  $1, t - 1, t + 1$  和  $t^2 - 1$ . 因此环  $R'$  恰好包含 4 个理想. 它们是由  $t^2 - 1$  的因子的剩余生成的主理想. ■

### 添加关系

当理想  $I$  是主理想时, 比如  $I = (a)$ , 我们重新对商环的结构给出说明. 在此情形, 我们将商环  $\bar{R} = R/I$  看作是在环  $R$  上施加了一个关系  $a = 0$  或是消去元素  $a$  得到的环. 例如, 域  $\mathbf{F}_7$  就看作是整数环  $\mathbf{Z}$  消去 7 得到的环.

我们检验发生的映射  $\pi: R \rightarrow \bar{R}$  上的坍塌. 它的核是理想  $I$ , 故  $a \in I: \pi(a) = 0$ . 若  $b$  为  $R$  中任意的元素, 与  $b$  在  $\bar{R}$  中有同一个像的元素是陪集  $b + I$  中的元素, 且由于  $I = (a)$ , 故陪集中的元素具有形式  $b + ra$ . 我们看到在环  $R$  上施加关系  $a = 0$  使我们能够令  $b = b + ra$  对所有  $b$  和  $r$  属于  $R$  成立, 且这是消去  $a$  的仅有的结果.

可通过模由  $a_1, \dots, a_n$  生成的理想  $I$  而引入任意多个关系  $a_1=0, \dots, a_n=0$ , 其中  $I = \{r_1 a_1 + \dots + r_n a_n \mid \text{系数 } r_i \in R\}$ . 商环  $\bar{R} = R/I$  可看做消去这  $n$  个元素得到的环.  $R$  中两个元素  $b$  与  $b'$  在  $\bar{R}$  中有相同的像当且仅当  $b'$  有形式  $b + r_1 a_1 + \dots + r_n a_n$  对某个  $r_i \in R$  成立.

添加的关系越多, 映射  $\pi$  坍缩得就越严重. 如果我们随意地添加关系, 则最坏的情况是  $I=R$ , 此时  $\bar{R}=0$ . 所有关系  $a=0$  都添加到  $R$  上, 则  $R$  就坍缩成一个零环.

此处对应定理给出了某些直观上显然的东西: 一次引入一个关系或者全部关系得出同构的结果. 为解释清楚, 令  $a, b \in R$ , 且令  $\bar{R} = R/(a)$  是  $R$  中消去元素  $a$  得到的结果. 令  $\bar{b}$  是  $\bar{R}$  中  $b$  的剩余. 由对应定理知  $\bar{R}$  的主理想  $(\bar{b})$  对应于  $R$  的理想  $(a, b)$ , 且  $R/(a, b)$  同构于  $\bar{R}/(\bar{b})$ . 在  $R$  中同时消去  $(a, b)$  所得到的结果与从先消去  $a$  得到的商环  $\bar{R} = R/a$  中消去  $\bar{b}$  所得的结果一样.

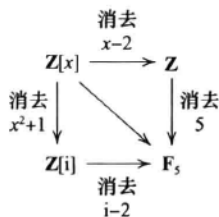
337

**【11.4.5】例** 我们要求识别商环  $\bar{R} = \mathbf{Z}[i]/(i-2)$ , 即一个在高斯整数上引入关系  $i-2=0$  后得到的环. 我们不直接分析, 而是注意到映射  $\mathbf{Z}[x] \rightarrow \mathbf{Z}[i]$  映  $x \rightsquigarrow i$ , 这个映射的核是  $\mathbf{Z}[x]$  的由  $f = x^2 + 1$  生成的主理想. 第一同构定理告诉我们  $\mathbf{Z}[x]/f \approx \mathbf{Z}[i]$ .  $g = x-2$  的像是  $i-2$ , 故  $\bar{R}$  也可以通过引入两个关系  $f=0$  和  $g=0$  到整多项式环上来得到. 令  $I = (f, g)$  是由两个多项式  $f, g$  生成的理想. 则  $\bar{R} \approx \mathbf{Z}[x]/I$ .

要构造  $\bar{R}$ , 我们可以按相反的顺序引入这两个关系. 先消去  $g$ , 再消去  $f$ .  $\mathbf{Z}[x]$  的主理想  $(g)$  是映  $x \rightsquigarrow 2$  的同态  $\mathbf{Z}[x] \rightarrow \mathbf{Z}$  的核. 故当在  $\mathbf{Z}[x]$  中消去  $x-2$  时, 我们得到一个与环  $\mathbf{Z}$  同构的环, 在这个环中,  $x$  的剩余是 2. 则  $f = x^2 + 1$  的剩余为 5. 故我们也可以通过在  $\mathbf{Z}$  中消去 5 得到  $\bar{R}$ , 因此  $\bar{R} \approx \mathbf{F}_5$ .

将上面所提到的环总结如下:

**【11.4.6】图**



## 第五节 元素的添加

本节讨论与关系的添加密切相关的一个过程: 添加新元素到一个环上. 这个过程的模式是从实数构造复数域的过程. 在  $\mathbf{R}$  中加上  $i$  得到  $\mathbf{C}$  的构造完全是形式的: 虚数  $i$  只有  $i^2 = -1$  这一个性质, 除此之外没有别的性质. 我们现在要刻画这一构造背后的一般原理. 从任意一个环  $R$  开始, 考虑构造一个包含  $R$  的元素同时包含一个记为  $\alpha$  的新元素的更大的环. 我们希望  $\alpha$  满足某个关系, 例如  $\alpha^2 + 1 = 0$ . 一个包含环  $R$  并将其作为子环的环  $R'$  称为  $R$  的一个环扩张. 因而我们是在寻找适当的环扩张.

有时元素  $\alpha$  会在一个已知的环扩张  $R'$  中. 在这种情形, 解是由  $R$  和  $\alpha$  生成的  $R'$  的子环, 即包含  $R$  和  $\alpha$  的最小子环. 这个环记为  $R[\alpha]$ . 在本章第一节中就  $R=\mathbf{Z}$  的情形已经描述了这个环, 而一般情形的描述没有什么区别:  $R[\alpha]$  由  $R'$  中所有系数  $r_i \in R$  的具有下列多项式表达式的元素  $\beta$  构成:  $\beta=r_n\alpha^n+\cdots+r_1\alpha+r_0$ .

但正如由  $\mathbf{R}$  构造  $\mathbf{C}$  时所发生的情况一样, 我们也许还没有包含  $\alpha$  的扩张. 于是必须抽象地构造它. 我们从多项式环  $R[x]$  开始. 它是由  $R$  和  $x$  生成的环. 元素  $x$  除了环公理所蕴含的关系外, 不满足别的关系, 我们可能要求新元素  $\alpha$  满足某些关系. 既然有了环  $R[x]$ , 就可以用第四节给出的关于多项式环  $R(x)$  的过程在它上面添加我们想要的关系. 在构造中用  $R[\alpha]$  代替  $R$  使记号变得复杂, 除此之外, 没有什么不同.

例如, 可以通过在实多项式环  $P=\mathbf{R}[x]$  上引入关系  $x^2+1=0$  形式地构造复数. 为此构造商环  $\bar{P}=P/(x^2+1)$ .  $x$  的剩余成为元素  $i$ . 注意在  $\bar{P}$  中关系  $\bar{x}^2+1=0$  成立, 这是因为映射  $\pi:P\rightarrow\bar{P}$  是同态且  $x^2+1\in\ker\pi$ , 故  $\bar{P}$  同构于  $\mathbf{C}$ .

一般地, 比如我们想添加元素  $\alpha$  到环  $R$  上, 且想令  $\alpha$  满足多项式关系  $f(x)=0$ , 此处

$$\text{【11.5.1】} \quad f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad \text{其中 } a_i \in R$$

解是  $R'=R[x]/(f)$ , 其中  $(f)$  为  $R[x]$  中由  $f$  生成的主理想.

令  $\alpha$  表示  $x$  在  $R'$  中的剩余  $\bar{x}$ , 则因为映射  $\pi:R[x]\rightarrow R[x]/(f)$  是一个同态, 故

$$\text{【11.5.2】} \quad \pi(f(x)) = \overline{f(x)} = \overline{a_n}\alpha^n + \cdots + \overline{a_0} = 0$$

此处  $\overline{a_i}$  是常数多项式  $a_i$  在  $R'$  中的像. 故省略掉  $\overline{a_i}$  上的横杠,  $\alpha$  满足关系  $f(\alpha)=0$ . 以这种方式得到的环也记为  $R[\alpha]$ .

例如: 令  $a$  为环  $R$  中的元素.  $a$  的逆元是一个元素  $\alpha$ , 满足关系

$$\text{【11.5.3】} \quad a\alpha - 1 = 0$$

故我们能添加这个逆元到  $R$  上形成一个商环  $R'=R[x]/(ax-1)$ .

最重要的情形是元素  $\alpha$  是一个首一多项式的根:

$$\text{【11.5.4】} \quad f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0, \quad \text{其中 } a_i \in R$$

在这种情形可精确地描述环  $R[\alpha]$ .

**【11.5.5】命题** 令  $R$  是一个环,  $f(x)$  是系数属于  $R$  的具有正次数  $n$  的首一多项式. 令  $R[\alpha]$  表示通过添加满足关系  $f(\alpha)=0$  的元素得到的环  $R[x]/(f)$ .

(a) 集合  $(1, \alpha, \cdots, \alpha^{n-1})$  是  $R[\alpha]$  在  $R$  上的一组基:  $R[\alpha]$  中每个元素可以唯一表示为系数在  $R$  上的这组基的一个线性组合.

(b) 两个线性组合的加法是向量加法.

(c) 线性组合的乘法如下: 令  $\beta_1, \beta_2 \in R[\alpha]$ , 且令  $g_1(x)$  和  $g_2(x)$  为满足  $\beta_1 = g_1(\alpha)$  和  $\beta_2 = g_2(\alpha)$  的多项式, 我们用  $f$  整除多项式的积  $g_1g_2$ , 比如  $g_1g_2 = fq + r$ , 其中若余式  $r(x) \neq 0$ , 则有  $\text{degr}(x) < n$ . 于是  $\beta_1\beta_2 = r(\alpha)$ .

下面的引理是显然的.

**【11.5.6】引理** 令  $f$  是一个多项式环  $R[x]$  上  $n$  次的首一多项式.  $(f)$  的每个非零元次数至少为  $n$ .

339

**命题 11.5.5 的证明** (a) 由于  $R[\alpha]$  是多项式环  $R[x]$  的商, 故  $R[\alpha]$  中每个元素  $\beta$  是多项式  $g(x)$  的剩余, 即  $\beta = g(\alpha)$ . 由于  $f$  是首一的, 故可做带余除法:  $g(x) = f(x)q(x) + r(x)$ , 此处  $r(x)$  或为 0 或次数小于  $n$  (11.2.9). 则由于  $f(\alpha) = 0$ , 故  $\beta = g(\alpha) = r(\alpha)$ . 这样  $\beta$  可以写成这组基的组合.  $\beta$  的表达式是唯一的, 因为主理想  $(f)$  不包含次数小于  $n$  的元素. 这也证明了 (c), 且 (b) 可由  $R[x]$  中的加法为向量加法这个事实得出. ■

**【11.5.7】例**

(a) 代入映射  $\mathbf{Z}[x] \rightarrow \mathbf{C}$  映  $x \rightsquigarrow \gamma = \sqrt[3]{2}$ , 该映射的核是  $\mathbf{Z}[x]$  的主理想  $(x^3 - 2)$  (11.3.23). 故  $\mathbf{Z}[\gamma]$  同构于  $\mathbf{Z}[x]/(x^3 - 2)$ . 命题表明  $(1, \gamma, \gamma^2)$  是  $\mathbf{Z}[\gamma]$  的一组  $\mathbf{Z}$ -基. 它的元素是线性组合  $a_0 + a_1\gamma + a_2\gamma^2$ , 其中  $a_i \in \mathbf{Z}$ . 如果  $\beta_1 = (\gamma^2 - \gamma)$  且  $\beta_2 = (\gamma^2 + 1)$ , 则

$$\beta_1\beta_2 = \gamma^4 - \gamma^3 + \gamma^2 - \gamma = f(\gamma)(\gamma - 1) + (\gamma^2 + \gamma - 2) = \gamma^2 + \gamma - 2$$

(b) 令  $R'$  为通过添加满足关系  $\delta^2 - 3 = 0$  的元素  $\delta$  到  $\mathbf{F}_5$  所得到的环. 这里  $\delta$  为 3 的一个抽象平方根. 命题 11.5.5 告诉我们  $R'$  的元素是 25 个线性表达  $a + b\delta$ , 其中系数  $a, b \in \mathbf{F}_5$ .

我们将通过证明  $R'$  的每个非零元素  $a + b\delta$  均有逆元来证明  $R'$  是一个 25 阶的域. 为此, 考虑积  $c = (a + b\delta)(a - b\delta) = (a^2 - 3b^2)$ . 这是  $\mathbf{F}_5$  的一个元素, 因为 3 在  $\mathbf{F}_5$  中不是平方数, 故除非  $a, b$  均为零, 否则  $c \neq 0$ . 故如果  $a + b\delta \neq 0$ , 则  $c$  在  $\mathbf{F}_5$  中可逆. 这样  $a + b\delta$  的逆元为  $(a - b\delta)c^{-1}$ .

(c) (b) 中的过程若用在  $\mathbf{F}_{11}$  上则不能产生域. 原因是  $\mathbf{F}_{11}$  已经包含了 3 的两个平方根, 即  $\pm 5$ . 若  $R'$  是通过添加满足关系  $\delta^2 - 3 = 0$  的元  $\delta$  得到的环, 那么我们再添加一个抽象的 3 的平方根, 尽管  $\mathbf{F}_{11}$  已经包含了两个平方根. 乍一看, 可能希望找出  $\mathbf{F}_{11}$ , 但我们做不到, 因为并不知道  $\delta$  是否等于 5 或 -5. 我们只知道  $\delta$  是 3 的平方根. 故  $\delta - 5$  和  $\delta + 5$  均不为 0, 但  $(\delta - 5)(\delta + 5) = \delta^2 - 3 = 0$ . 这在域中是不可能发生的情况. ■

分析由在环上添加一个满足非首一多项式关系的元素得到的环的结构是比较困难的.

**注** 有一点我们在讨论中一直回避, 现在考虑它: 当添加一个元素  $\alpha$  到环  $R$  上并满足关系  $f(\alpha) = 0$ , 原来的环  $R$  会不会是我们构造的环  $R'$  的子环? 我们知道  $R$  作为常数多项式的子环包含在多项式环  $R[x]$  中, 我们还有典范映射  $\pi: R[x] \rightarrow R' = R[x]/(f)$ . 限制  $\pi$  到常数多项式上给出同态  $R \rightarrow R'$ , 称这个同态为  $\psi$ , 这个  $\psi$  是单射吗? 如果不是单射, 就不能把  $R$  看做  $R'$  的子环.

$\psi$  的核是在理想中的常数多项式的集合:

**【11.5.8】**  $\ker\psi = R \cap (f)$

很可能  $\ker\psi = 0$ , 因为  $f$  有正次数. 必须进行多次消去使得  $f$  的多项式倍数的次数为零. 当要求  $\alpha$  满足首一多项式关系时, 这个核为零. 但核不总是零. 例如, 令  $R$  是整数模 6 的同余类环  $\mathbf{Z}/(6)$ , 且令  $f$  是  $R[x]$  上的多项式  $2x + 1$ , 则  $3f = 3$ . 故映射  $R \rightarrow R/(f)$  的核不

340

是零.

## 第六节 积 环

在第二章定义了两个群的积  $G \times G'$ . 这是集合的积, 合成法则按分量形式进行:  $(x, x')(y, y') = (xy, x'y')$ , 在环上可有类似结构.

**【11.6.1】命题** 令  $R$  和  $R'$  是环.

(a) 集合的积  $R \times R'$  是一个叫做“积环”的环, 加法和乘法均按分量进行计算:

$$(x, x') + (y, y') = (x + y, x' + y') \text{ 且 } (x, x')(y, y') = (xy, x'y')$$

(b) 在  $R \times R'$  中, 加法和乘法的单位元分别是  $(0, 0)$  和  $(1, 1)$ .

(c) 投影  $\pi: R \times R' \rightarrow R$  和  $\pi': R \times R' \rightarrow R'$  定义为  $\pi(x, x') = x$  与  $\pi'(x, x') = x'$  是环同态.  $\pi$  和  $\pi'$  的核分别是  $R \times R'$  的理想  $\{0\} \times R'$  和  $R \times \{0\}$ .

(d)  $\pi'$  的核  $R \times \{0\}$  是一个环, 具有乘法单位元  $e = (1, 0)$ . 但如果  $R' \neq \{0\}$ , 则它不是  $R \times R'$  的子环. 同样,  $\{0\} \times R'$  是一个环, 且有单位元  $e' = (0, 1)$ . 如果  $R \neq \{0\}$ , 则它也不是  $R \times R'$  的子环.

这些断言的证明非常初等, 在此省略, 但对于(d)可参见下一个命题.

要确定一个给定的环是否同构于一个积环, 我们在积环中寻找元素  $(1, 0)$  和  $(0, 1)$ . 它们是幂等元.

**注** 一个环  $S$  中的幂等元  $e$  是  $s$  中满足  $e^2 = e$  的元.

**【11.6.2】命题** 令  $e$  是环  $S$  的一个幂等元.

(a) 元素  $e' = 1 - e$  也是幂等元,  $e + e' = 1$  且  $ee' = 0$ .

(b) 将  $S$  中合成法则限制在主理想  $eS$  上, 主理想  $eS$  是一个有单位元  $e$  的环, 用  $e$  乘定义一个  $S$  到  $eS$  的环同态.

(c) 理想  $eS$  不是  $S$  的子环, 除非  $e$  是  $S$  的单位元素  $1$  且  $e' = 0$ .

(d) 环  $S$  同构于积环  $eS \times e'S$ .

**证明**

(a)  $e'^2 = (1 - e)^2 = 1 - 2e + e = e'$ , 且  $ee' = e(1 - e) = e - e = 0$ .

(b) 环  $S$  的每个理想  $I$  具有除乘法单位元的存在性以外的环的其他性质. 在此情形,  $e$  是  $eS$  的单位元, 因为若  $a \in eS$ , 比如  $a = eS$ , 则  $ea = e^2S = eS = a$ . 环的公理表明用  $e$  乘是一个同态:  $e(a + b) = ea + eb$ ,  $e(ab) = e^2ab = (ea)(eb)$ , 且  $e1 = e$ .

341

(c) 要成为  $S$  的子环,  $eS$  一定得含有  $S$  的单位元  $1$ . 如果是这样,  $e$  和  $1$  将都是  $eS$  的单位元, 且由于环中单位元唯一, 故  $e = 1$  且  $e' = 0$ .

(d) 法则  $\varphi(x) = (ex, e'x)$  定义了一个同态  $\varphi: S \rightarrow eS \times e'S$ , 因为两个映射  $x \rightsquigarrow ex$  与  $x \rightsquigarrow e'x$  均为同态, 且合成法则在积环中是按分量进行的. 我们验证这个同态是双射. 首先, 如果  $\varphi(x) = (0, 0)$ , 则  $ex = 0$  且  $e'x = 0$ . 若如此, 则  $x = (e + e')x = ex + e'x = 0$ . 这证明了  $\varphi$  是单射. 要证  $\varphi$  是满射, 令  $(u, v)$  是  $eS \times e'S$  中的元素, 比如  $u = ex$ ,  $v = e'y$ . 则  $\varphi(u + v) =$

$(e(ex+e'y), e'(ex+e'y))=(u, v)$ . 故  $(u, v)$  在  $\varphi$  的像中, 因此,  $\varphi$  是满射. ■

### 【11.6.3】例

(a) 我们回到添加 3 的一个抽象平方根到  $\mathbf{F}_{11}$  得到的环  $R'$ . 它的元素是  $11^2$  个  $a+b\delta$  的线性组合, 其中  $a, b \in \mathbf{F}_{11}$ ,  $\delta^2=3$ . 在 (11.5.7)(c) 中我们看到这个环不是一个域, 原因是  $\mathbf{F}_{11}$  已包含两个 3 的平方根  $\pm 5$ . 元素  $e=\delta-5$  和  $e'=-\delta-5$  是  $R'$  中的幂等元, 且  $e+e'=1$ . 因此  $R' \approx eR' \times e'R'$ . 由于  $R'$  的阶为  $11^2$ , 故  $|eR'| = |e'R'| = 11$ . 环  $eR'$  和  $e'R'$  均与  $\mathbf{F}_{11}$  同构, 且  $R' \approx \mathbf{F}_{11} \times \mathbf{F}_{11}$ .

(b) 我们定义  $\varphi: \mathbf{C}[x, y] \rightarrow \mathbf{C}[x] \times \mathbf{C}[y]$  是从两个变元的多项式环到积环的同态, 满足  $\varphi(f(x, y)) = (f(x, 0), f(0, y))$ .  $\ker \varphi = \{f(x, y) \mid f(x, y) \text{ 能被 } x \text{ 和 } y \text{ 整除}\}$ , 它为  $\mathbf{C}[x, y]$  中由多项式  $xy$  生成的主理想. 这个映射不是满射.  $\varphi$  的像是由形如  $(p(x), q(y))$  的多项式对 ( $p$  与  $q$  的常数项相同) 构成的积的子环. 故商  $\mathbf{C}[x, y]/(xy)$  同构于这个子环. ■

## 第七节 分 式

在本节, 我们考虑环中的分式而不是整数的用法. 例如, 两个多项式  $p, q$  所构成的分式  $p/q$ ,  $q \neq 0$  称为有理函数.

我们复习一下整数分式的算术. 为了将下面的论述应用到其他环上, 我们用一中性符号  $R$  表示整数环.

- 一个分式是一个符号  $a/b$  或  $\frac{a}{b}$ , 其中  $a, b \in R, b \neq 0$ .
- $R$  中每个元素按照法则  $a = a/1$  可看成分式.
- 两个分式  $a_1/b_1$  与  $a_2/b_2$  是等价的,  $a_1/b_1 \approx a_2/b_2$ , 如果  $R$  中的由“十字相乘”后得到的元素是相等的, 即如果  $a_1b_2 = a_2b_1$ .
- 分式的和与积由  $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$  与  $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$  给出.

在第三条中, 我们采用“等价”这个术语. 因为严格来讲, 分式实际上是不相等的.

用任意环  $R$  取代整数产生的一个问题是: 在加法的定义中, 和的分母是积  $bd$ . 由于零不能做分母, 故  $bd$  最好不是零. 由于  $b$  和  $d$  是分母, 故  $b$  和  $d$  都不是零, 但我们需要知道  $R$  的非零元的积是非零元. 这是产生的仅有的一个问题, 但任何非零元的积未必总是非零的. 例如, 在同余类模 6 的环  $\mathbf{Z}/(6)$  中, 2 和 3 所在的类非零, 但  $2 \cdot 3 = 0$ . 或在非零环的一个积环  $R \times R'$  中, 幂等元  $(1, 0)$  和  $(0, 1)$  是非零元, 但它们的积是零. 在这样的环中不能考虑分式.

**注** 整环  $R$  是具有下面性质的环:  $R$  不是零环, 且如果  $a, b \in R$ , 且  $ab=0$  则  $a=0$  或  $b=0$ .

一个域的任意环是一个整环, 且如果  $R$  是整环, 则多项式环  $R[X]$  也是一个整环.



环的一个元素  $a$  成为一个零因子, 如果它是非零的, 且如果存在一个非零元素  $b$  使得  $ab=0$ . 整环是不包含零因子的非零环.

一个整环  $R$  满足消去律:

**【11.7.1】** 如果  $ab=ac$  且  $a \neq 0$ , 则  $b=c$   
 因为从  $ab=ac$  可得  $a(b-c)=0$ , 则由  $a \neq 0$ ,  $R$  为整环, 有  $b-c=0$ .

**【11.7.2】定理** 令  $F$  是一个整环  $R$  的元素的分式的等价类的集合.

(a) 按如上定义的运算律,  $F$  是一个域, 称为  $R$  的分式域.

(b)  $R$  按规则  $a \sim a/1$  可以作为子环嵌入  $F$  中.

(c) 映射性质: 如果  $R$  作为子环嵌入另一个域  $\mathcal{F}$  中, 则  $F$  中的规则  $a/b=ab^{-1}$  也嵌入到  $\mathcal{F}$  中.

短语“映射性质”解释如下: 为表述清楚这个性质, 我们应该想象环  $R$  到  $\mathcal{F}$  的嵌入由一个单射环同态  $\varphi: R \rightarrow \mathcal{F}$  给出. “映射性质”就是将  $\varphi$  推广到一个单射同态  $\Phi: F \rightarrow \mathcal{F}$  上, 规则是  $\Phi(a/b) = \varphi(a)\varphi(b)^{-1}$ .

定理 11.7.2 的证明有几部分. 必须验证我们所说的分式的等价的确是一个等价关系, 加法和乘法在等价类上是定义好的; 二要验证域的公理成立; 三要验证映  $a \sim a/1$  的映射是  $R \rightarrow F$  的单射同态. 最后还要验证映射性质. 所有这些验证都是直接的.

如果我们是第一个想在环上使用分式的, 则会焦急地想仔细验证每一部分. 但这些已经被验证了许多次. 看来只需验证其中某几部分获得所涉及的问题的一点感性知识就够了.

我们验证分式的等价是传递关系. 假设  $a_1/b_1 \approx a_2/b_2$  与  $a_2/b_2 \approx a_3/b_3$ . 则  $a_1b_2 = a_2b_1$ ,  $a_2b_3 = a_3b_2$  分别用  $b_3$  与  $b_1$  乘两边:

$$a_1b_2b_3 = a_2b_1b_3, \quad a_2b_3b_1 = a_3b_2b_1$$

因此  $a_1b_2b_3 = a_3b_2b_1$ . 消去  $b_2$  得  $a_3b_1 = a_1b_3$ . 因此  $a_1/b_1 \approx a_3/b_3$ . 由于用到了消去律, 因此  $R$  是整环至关重要.

其次, 我们证明分式的加法是定义好的. 假设  $a/b \approx a'/b'$  与  $c/d \approx c'/d'$ . 我们必须证明:  $a/b + c/d \approx a'/b' + c'/d'$ . 为此, 用十字相乘来表示和. 我们必须证明:  $u = (ad+bc)(b'd')$  等于  $v = (a'd' + b'c')(bd)$ . 关系  $ab' = a'b$  和  $cd' = c'd$  表明:

$$u = adb'd' + bcb'd' = a'dbd' + bc'b'd = v$$

映射性质的验证也是例行公事. 唯一值得注意的是, 如果  $R \subset \mathcal{F}$  且  $a/b$  是一个分式, 则  $b \neq 0$ , 故规则  $a/b = ab^{-1}$  有意义.

如前所述, 一个多项式分式称为有理函数. 当  $K$  是一个域时, 多项式环  $K[x]$  的分式域称为系数在  $K$  上的  $x$  的有理函数域, 这个域通常记为  $K(x)$ :

**【11.7.3】**  $K(x) = \{ \text{分式 } f/g \text{ 的等价类, 其中 } f \text{ 与 } g \text{ 是多项式, 且 } g \text{ 是非零多项式} \}$

此处所定义的可理函数是在本章第二节中定义的形式多项式的分式的等价类. 如果  $K = \mathbf{R}$ , 则有理函数  $f/g$  的值就定义了实数轴上的一个实际函数, 此处  $g(x) \neq 0$ . 但对于多项式, 我们应该区分它是形式地定义的可理函数还是实际中定义的可理函数.

## 第八节 极大理想

本节讨论从一个环  $R$  到一个域  $F$  的满同态

$$\text{【11.8.1】} \quad \varphi: R \rightarrow F$$

的核.

令  $\varphi$  是一个映射. 域  $F$  只有两个理想, 一个零理想  $(0)$  和一个单位理想  $(1)$  (11.3.19). 零理想的原像是  $\varphi$  的核  $I$ , 单位理想的原像为  $R$  的单位理想. 由对应定理可知  $R$  的仅有的包含  $I$  的理想为  $I$  和  $R$ . 鉴于此,  $I$  称为一个极大理想.

**注** 环  $R$  的一个极大理想  $M$  是  $R$  的一个理想,  $M \neq R$ , 它不包含在任何异于  $M$  和  $R$  的理想中: 如果  $I$  包含  $M$ , 则  $I=M$  或  $I=R$ .

### 【11.8.2】命题

(a) 令  $\varphi: R \rightarrow R'$  是一个满的环同态, 其中  $\ker \varphi = I$ , 则  $\varphi$  的像  $R'$  为一个域当且仅当  $I$  是一个极大理想.

(b) 环  $R$  的一个理想  $I$  是极大理想当且仅当  $\bar{R} = R/I$  是一个域.

(c) 环  $R$  的零理想是极大的当且仅当  $R$  是一个域.

**证明** (a) 一个环是域如果它恰好包含两个理想 (11.3.19), 故对应定理断言  $\varphi$  的像是域当且仅当恰好存在包含核  $I$  的两个理想.  $R'$  是域当且仅当  $I$  是极大理想.

当把 (a) 应用于典范映射  $R \rightarrow R/I$  时, 可得出 (b) 和 (c) 的结论. ■

344

### 【11.8.3】命题 整数环 $\mathbf{Z}$ 的极大理想是由素数生成的主理想.

**证明**  $\mathbf{Z}$  的每个理想是主理想. 考虑主理想  $(n)$ ,  $n \geq 0$ . 如果  $n$  是素数, 比如  $n=p$ , 则  $\mathbf{Z}/(n) = \mathbf{F}_p$ , 是一个域. 则理想  $(n)$  是极大的. 如果  $n$  不是素数, 则存在三种可能性:  $n=0$ ,  $n=1$ , 或  $n$  有因子. 零理想和单位理想都不是极大理想. 如果  $n$  有因子, 比如  $n=ab$ , 且  $1 < a < n$ , 则  $1 \notin (a)$ ,  $a \notin (n)$ , 且  $n \in (a)$ . 因此,  $(n) < (a) < (1)$ . 理想  $(n)$  不是极大的. ■

**注** 一个系数在一个域上的多项式为既约的, 如果它不是常数且它不是两个非常数的多项式的乘积.

### 【11.8.4】命题

(a) 令  $F$  是一个域, 则  $F[x]$  的极大理想是由既约的首一多项式生成的主理想.

(b) 令  $\varphi: F[x] \rightarrow R'$  是一个到整环  $R'$  的同态, 且令  $P = \ker \varphi$ , 则或者  $P$  是一个极大理想, 或  $P = (0)$ .

(a) 的证明与上面给出的证明类似, (b) 的证明省略.

**【11.8.5】推论** 存在复数域上单变量多项式环  $\mathbf{C}[x]$  的极大理想与复平面上的点之间的一个双射对应. 对应于复平面上的点  $a$  的极大理想  $M_a$  是映  $x \rightsquigarrow a$  的代入同态  $s_a: \mathbf{C}[x] \rightarrow \mathbf{C}$  的核. 该核是由线性多项式  $x-a$  生成的主理想.

**证明** 代入同态  $s_a$  的核  $M_a$  由满足  $f(a)=0$  的  $\mathbf{C}[x]$  中的多项式  $f(x)$  组成,  $a$  是  $f(x)$

的一个根, 即  $x-a$  整除  $f(x)$ . 故  $M_a = (x-a)$ . 反之, 令  $M$  为  $\mathbb{C}[x]$  中的一个极大理想, 则  $M$  由首一的既约多项式生成. 在  $\mathbb{C}[x]$  中首一的既约多项式是多项式  $x-a$ . ■

下面的定理把此推论推广到多变量多项式环上.

**【11.8.6】定理** (希尔伯特零点定理)<sup>⊖</sup> 多项式环  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  的极大理想与复  $n$  维空间的点一一对应.  $\mathbb{C}^n$  的一个点  $a = (a_1, \dots, a_n)$  对应于映  $x_i \rightsquigarrow a_i$  的代入映射  $s_a: \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \rightarrow \mathbb{C}$  的核  $M_a$ . 这个映射的核  $M_a$  是由  $n$  个线性多项式  $x_i - a_i$  生成的理想.

**证明** 令  $a \in \mathbb{C}^n$  且  $M_a = \ker s_a$ . 由于  $s_a$  是满射且  $\mathbb{C}$  是域, 因此  $M_a$  是极大理想. 要证明  $M_a$  是由线性多项式  $x_i - a_i$  生成的, 先考虑点  $a$  为原点  $(0, \dots, 0)$  的情形. 必须证明在原点对多项式求值的映射  $s_0$  的核是由变量  $x_1, \dots, x_n$  生成的.  $f(0, \dots, 0) = 0$  当且仅当  $f$  的常数项是零. 如果是这样的话, 那么任何出现在  $f$  中的单项式都至少被一个变量整除, 故  $f$  可以写成以多项式为系数的变量  $x_i$  的线性组合. 对任意一点  $a = (a_1, \dots, a_n)$  的情形的证明可以通过变换  $x_i = x'_i + a_i$  将  $a$  移动到原点得到.

345

证明每个极大理想具有  $M_a$  的形式较困难. 令  $M$  是一个极大理想, 且令  $\mathcal{F}$  表示域  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/M$ . 我们限制典范映射 (11.4.1)  $\pi: \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \rightarrow \mathcal{F}$  到第一个变元的多项式子环  $\mathbb{C}[x_1]$  上, 得到一个同态映射  $\varphi_1: \mathbb{C}[x_1] \rightarrow \mathcal{F}$ . 命题 11.8.4 表明  $\varphi$  的核或是零理想或是  $\mathbb{C}[x_1]$  的一个极大理想  $(x_1 - a_1)$ . 我们证明  $\ker \varphi \neq \{0\}$ . 将指标 1 换成其他指标, 结论也成立. 故对每个  $i$ ,  $M$  将包含形如  $x_i - a_i$  的线性多项式. 这就表明  $M$  包含某个理想  $M_a$ , 且由  $M_a$  是极大理想, 有  $M = M_a$ .

接下来, 我们省去  $x_1$  的下标. 假设  $\ker \varphi = (0)$ , 则  $\varphi$  将  $\mathbb{C}[x]$  同构地映射到它的像, 即  $\mathcal{F}$  的一个子环. 分式域的映射性质表明此映射推广到一个内射  $\mathbb{C}[x] \rightarrow \mathcal{F}$ , 其中  $\mathbb{C}[x]$  是有理函数域——多项式环  $\mathbb{C}[x]$  的分式域. 故  $\mathcal{F}$  包含一个同构于  $\mathbb{C}[x]$  的域. 下一个引理表明这是不可能的. 因此  $\ker \varphi = (0)$ .

### 【11.8.7】引理

- (a) 令  $R$  是以复数域  $\mathbb{C}$  作为子环的环.  $R$  上的合成法则可用来使  $R$  成为复向量空间.
- (b) 作为一个向量空间, 域  $\mathcal{F} = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/M$  可由可数多个元素的集合张成.
- (c) 令  $V$  是域上一个向量空间, 并假设  $V$  由可数多个向量集合张成, 则  $V$  的每个无关于子集是有限的或可数无限的.
- (d) 当把  $\mathbb{C}[x]$  看成  $\mathbb{C}$  上一个向量空间时, 有理函数  $(x-\alpha)^{-1}$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$  的不可数集是无关的.

假设这个引理已被证明. 则 (b) 和 (c) 表明  $\mathcal{F}$  上每个无关的集合是有限的或可数无限的. 另一方面,  $\mathcal{F}$  包含同构于  $\mathbb{C}(x)$  的子环, 故由 (d),  $\mathcal{F}$  包含一个不可数的无关集. 这导出矛盾. ■

**引理的证明** (a) 对加法, 用环  $R$  上的加法运算律, 标量乘法  $ca$ ,  $a \in R$ ,  $c \in \mathbb{C}$  定义为

⊖ 德文词 Nullstellensatz 是三个其译文是零、地点和定理的词的组合.

将  $R$  中这些元素相乘. 由环公理可得到一个向量空间的公理.

(b) 满同态  $\pi: \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \rightarrow \mathcal{F}$  定义一个映射  $\mathbb{C} \rightarrow \mathcal{F}$ , 借助此同态可把  $\mathbb{C}$  看做  $\mathcal{F}$  的一个子环, 且把  $\mathcal{F}$  做成复向量空间. 所有可数的首一的单项式的集合构成  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  的一组基, 且由于  $\pi$  是满的, 故这些单项式的像张成  $\mathcal{F}$ .

(c) 令  $S$  是张成  $V$  的可数集, 比如  $S = \{v_1, v_2, \dots\}$ .  $S$  是有限的或无限的. 令  $S_n$  是由  $S$  的前  $n$  个元素构成的子集  $(v_1, \dots, v_n)$ , 令  $V_n$  是  $S_n$  的张成. 如果  $S$  是无限的, 则将无限多个这样的子空间. 由于  $S$  张成  $V$ , 故  $V$  的每个元素是  $S$  中有限多个元素的线性组合, 故是某个空间  $V_n$  中的元素. 换句话说,  $\bigcup V_n = V$ .

令  $L$  是  $V$  中的一个无关集合, 且令  $L_n = L \cap V_n$ . 则  $L_n$  是空间  $V_n$  的一个线性无关子集, 它由  $n$  个元素的集合张成. 故  $|L_n| \leq n$  (3.4.18). 而且,  $L = \bigcup L_n$  因为  $V = \bigcup V_n$ . 可数多个有限集合的并是有限集或可数无限集.

(d) 必须记住: 线性组合只涉及有限多个向量. 试问: 线性关系

$$\sum_{v=1}^k \frac{c_v}{x - \alpha_v} = 0$$

成立吗? 其中  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  是不同复数, 且其中某个系数  $c_v$  不是零. 答案是不成立. 这样的形式有理函数的线性组合除去在点  $x = \alpha_v$  外定义了一个复值函数. 如果这个线性自合是零, 则所定义的函数等同于 0. 但  $(x - \alpha_1)^{-1}$  在  $\alpha_1$  点临近可以取任意大的值, 而  $(x - \alpha_v)^{-1}$  在  $\alpha_1$  点临近是有界的, 其中  $v = 2, \dots, k_0$ . 故这个线性组合不能定义零函数. ■

## 第九节 代数几何

$\mathbb{C}^n$  中的一个点  $(a_1, \dots, a_n)$  称为  $n$  个变量的多项式  $f(x_1, \dots, x_n)$  的零点, 如果  $f(a_1, \dots, a_n) = 0$ . 我们也称多项式  $f$  在这一点消失了. 多项式的集合  $\{f_1, \dots, f_r\}$  的公共零点是  $\mathbb{C}^n$  中这样的点: 在此点, 所有多项式消失. 公共零点是方程组  $f_1 = \dots = f_r = 0$  的解集.

**注**  $n$  个变元的有限多个多项式的公共零点的集合构成复  $n$  维空间  $\mathbb{C}^n$  的一个子集  $V$ , 被称为一个代数簇, 或叫做簇.

例如, 由定义, 在  $(x, y)$ -平面  $\mathbb{C}^2$  上的复直线是一个线性方程  $ax + by + c = 0$  的解集. 这是一个簇. 故一个点也是一个簇. 点  $(a, b) \in \mathbb{C}^2$  是两个多项式  $x - a$  与  $y - b$  的公共零点的集合. 群  $SL_2(\mathbb{C})$  是  $\mathbb{C}^{2 \times 2}$  的一个簇. 它是多项式  $x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21} - 1$  的零点的集合.

零点定理给出了代数与几何之间的一个重要联系. 它告诉我们多项式环  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  上的极大理想对应于  $\mathbb{C}^n$  中的点. 这个对应也将代数簇和多项式环的商环联系起来.

**【11.9.1】定理** 令  $I$  是由一些多项式  $f_1, \dots, f_r$  生成的  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  的一个理想, 令  $R$  表示商环  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/I$ . 令  $V$  表示  $f_1, \dots, f_r$  在  $\mathbb{C}^n$  中的(公共)零点的簇, 则  $R$  的极大理想与  $V$  中的点一一对应.