图论

2023 年 8 月 2 日

定义 1

图 $G=(V,E)$ 是一个二元组 (V,E)，其中 V 是一个满足 $V\cap V^{(2)}=\varnothing$ 的非空有限集，E 是 V 的二元子集族 $V^{(2)}$ 的子集。集合 V 中的元素称为 G 的**顶点**，集合 E 中的元素称为 G 的**边**。

我们使用记号 $V(G),E(G)$ 来表示图 G 的顶点集和边集，在不引起混淆的情况下也直接使用 V,E 来表示。我们通常使用 v,e 来表示 G 的顶点和边。
我们通常将一条边 $e=\{x,y\}$ 简记为 xy，并称顶点 x,y 与边 e **关联**，顶点 x,y 是边 e 的**端点**，边 e **连接**它的两个端点 x,y。如果顶点 x,y 是一条边的端点，则称顶点 x,y **相邻或互为邻点**；如果边 $e\neq f$ 有一个公共端点，则称 e,f **相邻**。两两不相邻的顶点集或边集称为**独立（顶点）集**或**独立边集**。若 G 的顶点两两相邻，则称 G 是**完全图**。顶点数为 n 的完全图记作 K_n。
若 X,Y 是顶点集的子集，且 $x\in X,y\in Y$，我们称 xy 是一条 $X-Y$ 边，所有这些边的集合用记号 $E(X,Y)$ 表示，并将 $E(\{x\},Y),E(X,\{y\})$ 分别简记为 $E(x,Y),E(X,y)$，且将 $E(X,V),E(x,V)$ 简记成 $E(X),E(v)$。

定义 2

设 $G=(V,E), G'=(V',E')$ 是两个图，如果存在双射 $\varphi: V\to V'$，使得对任意的顶点 $x,y\in V$ 满足 x,y 在 G 中相邻当且仅当 $\varphi(x),\varphi(y)$ 在 E' 中相邻，我们称 G 和 G' 是**同构**的，记作 $G\simeq G'$。

通常情况下，我们并不区分同构的图，此时我们将其记作 $G=G'$。并且我们通常研究的是在同构意义下保持的性质或不变量，我们将这其称为**图性质**或**图不变量**。

子图

定义 3

两个图 $G=(V,E), G'=(V',E')$ 满足 $V'\subseteq V, E'\subseteq E$，则称 G' 是 G 的**子图**，记作 $G'\subseteq G$。
若 $G'\neq G$，则称 G' 是 G 的**真子图**。
若 $E'=V'^{(2)}\cap E$，则称 G' 是 G 的**诱导子图或导出子图**。
若 $V'=V$，则称 G' 是 G 的**生成子图或支撑子图**。

若 U 是 $G=(V,E)$ 的顶点集 V 的子集，我们将顶点集为 $V\setminus U$ 的诱导子图 $(V\setminus U,(V\setminus U)^{(2)}\cap E)$ 简记为 $G-U$，若 U 是单元素集 $\{v\}$ 我们将 $G-\{v\}$ 简记为 $G-v$。
若 F 是 $G=(V,E)$ 的边集 E 的子集，我们将边集为 $E\setminus F$ 的生成子图 $(V,E\setminus F)$ 简记为 $G-F$，若 F 是单元素集 $\{e\}$ 我们将 $G-\{e\}$ 简记为 $G-e$。
如果 $G'=G-F$ 或 $G'=G-e$，我们也可以将其记为 $G=G'+F$ 或 $G=G'+e$。

顶点度

定义 4

图 G 中顶点 v 的所有邻点的集合称为顶点 v 的**邻域**，记作 $N_G(v)$ 或简记作 $N(v)$。更一般地，对独立集 $U \subseteq V$，将 U 中顶点的邻域的并集称为 U 的**邻域**，记作 $N_G(U)$ 或简记作 $N(U)$。
与顶点 v 关联的边的数量 $|E(v)| = |N(v)|$ 称为顶点 v 的**度**，记作 $d_G(v)$ 或简记作 $d(v)$。

G 的最小度记作 $\delta(G) = \min_{v \in V} d(v)$，而最大度记作 $\Delta(G) = \max_{v \in V} d(v)$。二者可以简记作 δ, Δ。如果 $\delta = \Delta = k$，即图 G 的所有顶点度都等于 k，则称图 G 是 k-**正则图**。
通过对图 G 中关联的顶点-边二元组 (v, e) 算两次，我们可以得到：

定理 5

图 G 的所有顶点度的和等于 G 的边数量的两倍。

定理 6

图 G 中度为奇数的顶点个数是偶数。

度序列

定义 7

将图 G 中所有顶点度按从大到小排列得到的整数序列，称为 G 的**度序列**。

直观上来说，越平均的序列越容易称为度序列，形式上来说我们可以得到：

定理 8

非负整数序列 $d_1, \cdots, d_n$ 是度序列当且仅当存在度序列 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 使得 $c \succ d$。

这一定理实际上给出了判定一个序列是否是度序列的贪心算法，而下面的定理同样可以用来判定这一问题，

定理 9

非负整数序列 $d_1 \geq d_2 \geq \cdots d_n \geq 0$ 是一个顶点数为 n 的图的度序列当且仅当满足：

- $d_1 + d_2 + \cdots + d_n$ 是偶数；
- 对任意 $1 \leq k \leq n$，有 $\sum_{i=1}^{k} d_i \leq k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min\{d_i, k\}$。

定义 10

图 G 中长度为 k 的**途径**是一个顶点和边的交错序列 $v_0 e_1 v_1 e_2 \cdots e_k v_k$，其中 $e_i = v_{i-1} v_i$。若 $v_0 = v_k$，我们称这条途径是**闭途径**。
对一条途径 $v_0 e_1 v_1 e_2 \cdots e_k v_k$，如果其中所有边两两不同，则称其为**迹**。闭的迹称为**回路**。
对一条迹 $v_0 e_1 v_1 e_2 \cdots e_k v_k$，如果其中所有点两两不同，则称其为**路径**。长度为 n 的路径记作 P_n。
如果 $v_0 e_1 v_1 e_2 \cdots e_k v_k$ 是路径且 $k \geq 2$，则回路 $v_0 e_1 v_1 e_2 \cdots e_k v_k \{v_k, v_0\} v_0$ 称为**圈**。长度为 n 的圈也称为 n-**边形**（特别地当 $n = 3$ 时也称为**三角形**），记作 C_n。

给定 $A, B \subseteq V$，我们将满足 $v_0 \in A, v_k \in B$ 且不含其他 $A \cup B$ 中顶点的路径称为 $A - B$ 路径。这里我们同样可以将 $\{a\}$ 或 $\{b\}$ 简写称 a 或 b。对于一组路径，如果它们只在端点处和其他路径相交，我们称这组路径是**独立**的。

连通性

定义 11

若图 G 的任意两个顶点之间存在路径，则称 G 是**连通**的。

G 的极大连通子图称为 G 的**连通分支**。显然连通分支都是 G 的诱导子图，且它们的顶点集形成了 G 的顶点集的一个划分。

定义 12

设 k 为非负整数。
若 $|V| > k$，且当 $|X| < k, X \subseteq V$ 时均有 $G - X$ 是连通的，则称 G 是 k-**（顶点）连通**的。满足 G 是 k-顶点连通的最大整数 k 称为 G 的**（顶点）连通度**，记作 $\kappa(G)$。
若 $|E| \geq k$，且当 $|X| < k, X \subseteq E$ 时均有 $G - X$ 是连通的，则称 G 是 k-**边连通**的。满足 G 是 k-边连通的最大整数 k 称为 G 的**边连通度**，记作 $\lambda(G)$。

连通性

描述连通性的另一种手段是从顶点集的分离出发。

定义 13

给定 $A, B \subseteq V$ 和 $X \subseteq V \cup E$，如果 G 的所有 $A-B$ 路径都和 X 有交，则称在 G 中 X **分离** A, B。
若两个顶点 $a, b \in V$ 满足 X 分离 $\{a\}, \{b\}$ 且 $a, b \notin X$，则称在 G 中 X **分离**顶点 a, b。

定理 14

若图 G 满足 $|V| > 1$，则图 G 是 k-顶点/边连通的当且仅当图 G 中任意一对顶点 x, y 不能用少于 k 的顶点/边集分离。

由此不难证明：

定理 15

图 G 的连通度、边连通度和最小度满足 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$。

连通性

下面的 Menger 定理更深刻的描述的连通性。

定理 16 (Menger)

设 $G=(V,E)$ 是一个图且 $A,B\subseteq V$，则 G 中分离 A,B 的最小顶点数等于 G 中互不相交的 $A-B$ 路径的最大数量。

证明.

假定 k 是 G 中分离 A,B 的最小顶点数，我们只需要找出 k 条互不相交的 $A-B$ 路径。

当 $|E|=0$ 时显然成立。当 $|E|>0$ 时，取 $e=xy\in E$。若 G/e 中存在 k 条互不相交的 $A-B$ 路径，则 G 中也存在这样 k 条互不相交的 $A-B$ 路径。若 G/e 中不存在 k 条互不相交的 $A-B$ 路径，则 G/e 中分离 A,B 的最小顶点数小于 k，于是可以得到 G 中大小为 k 的顶点集 X 分离 A,B 且 $x,y\in X$。又在 $G-e$ 中分离 A,X 或 X,B 的顶点集在 G 中分离 A,B，从而得到 k 条互不相交的 $A-X$ 和 $X-B$ 路径，将其拼接即得 k 条 $A-B$ 路径。

□

连通性

Menger 定理还有其它几个不同的形式。

定理 17

设 $G=(V,E)$ 是一个图且 $A,B\subseteq V, A\cap B=\varnothing$，则 G 中分离 A,B 的最小边数等于 G 中边不交的 $A-B$ 路径的最大数量。

定理 18

设 G 是顶点数大于 1 的图，则:

- G 是 k -连通的当且仅当对任意 $u,v\in V$，存在 k 条独立 $u-v$ 路径;
- G 是 k -边连通的当且仅当对任意 $u,v\in V$，存在 k 条边不交 $u-v$ 路径。

树

定义 19

无圈的图称为**森林**，而连通的森林称为**树**。

利用树的定义我们不难证明如下结果：

定理 20

对于图 T，以下结论等价：

(i) T 是树；

(ii) T 中任意两个顶点间存在唯一一条路径；

(iii) T 是连通的且对任意边 $e \in E(T)$，$T - e$ 是不连通的；

(iv) T 是无圈的且对其中任意两个不相邻的顶点 $x, y \in V(T)$，$T + xy$ 包含圈。

有根树

在某些问题中，将树的一个顶点作特殊的处理可以让问题简化。我们称这个顶点为树的根，而固定了根的树称为有根树。

定义 21

设有根树 T 的根为 r，对任意 $x, y \in V(T)$，若 x 在 T 中 r, y 之间的路径上，则称 $x \leq_T y$，于是 $\leq_T$ 是 $V(T)$ 上的一个偏序关系，称为由有根树 T 的**树序**。

和树序有关的一个重要概念是深度优先搜索树：

定义 22

图 G 的**深度优先搜索树**是 G 的有根生成树 T，使得图 G 中任意两个相邻的顶点在 T 的树序中是可比的。

定理 23

以连通图 G 的任意顶点为根，存在一棵深度优先搜索树。

距离

定义 24

图 G 的顶点对 x, y 间的**距离** $d_G(x, y) = d(x, y)$ 是最短的 x–y 路径的长度。
图 G 中最短圈的长度称为**围长**，记作 $g(G)$。
图 G 中所有顶点对距离的最大值称为图 G 的**直径**，记作 $\mathrm{diam}\, G$。
图 G 的中心是到其他顶点的距离最大值最小的顶点，这一最小值称为图 G 的**半径**，记作 $\mathrm{rad}\, G$。

和距离这一概念有着密切联系的是广度优先搜索树：

定义 25

图 G 的**广度优先搜索树**是 G 以顶点 r 为根的有根生成树，使得对 G 的任意顶点 v 都有 $d_T(r, v) = d_G(r, v)$。

定理 26

以连通图 G 的任意顶点为根，存在一棵广度优先搜索树。

Euler 回路

定义 27

图 G 包含 E 中所有边的回路称为 **Euler 回路**。

定理 28

连通图 G 有 *Euler* 回路当且仅当 G 的所有顶点度是偶数。

证明.

必要性是显然的。
对于充分性，不妨 G 中至少有一条边，则 G 不是树，从而 G 中存在圈，且删去此圈后每个连通分支存在欧拉回路，利用这个圈即可将这些回路拼接成原图的欧拉回路。 □

线性代数

在这一部分，我们假定 $G=(V,E)$ 是一个顶点数为 n 且边数为 m 的图，且 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，$E=\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$。

定义 29

图 G 的顶点集或边集的幂集 $\mathcal{P}(V),\mathcal{P}(E)$ 在集合对称差运算下可以看作 $\mathbb{F}_2$ 上的线性空间，称为图 G 的**顶点空间和边空间**，记作 $\mathcal{V}(G)$ 和 $\mathcal{E}(G)$。

定义 30

图 G 的**关联矩阵** $B=(b_{ij})_{n\times m}$ 定义为:

$$b_{i,j}=\begin{cases}1, & v_i\in e_j,\\ 0, & v_i\notin e_j.\end{cases}$$

图的关联矩阵和它的转置定义了图的点空间和边空间之间的两个线性映射 $\mathscr{B}:\mathcal{E}(G)\to\mathcal{V}(G)$ 和 $\mathscr{B}^T:\mathcal{V}(G)\to\mathcal{E}(G)$，我们将在接下来的部分观察这两个线性映射的性质。

圈空间

定义 31

由图 G 的所有圈生成的 $\mathcal{E}(G)$ 的子空间，称为图 G 的**圈空间**，记作 $\mathcal{C}(G)$。

定理 32

设 $F \subseteq E$，则以下命题等价：

(i) $F \in \mathcal{C}(G)$；

(ii) F 是图 G 的一些圈的边不交并；

(iii) 生成子图 (V, F) 的所有顶点度为偶数。

定理 33

圈空间 $\mathcal{C}(G)$ 是映射 $\mathscr{B}$ 的核。

割空间

我们将图 G 形如 $E(U, V \setminus U)$ 的边集称为 G 的**割**，我们将 G 的所有割的集合记作 $\mathcal{B}(G)$。

定理 34

图 G 的所有割 $\mathcal{B}(G)$ 是 $\mathcal{E}(G)$ 的子空间，称为图 G 的**割空间**。

定理 35

$\mathcal{B}(G)$ 是映射 $\mathscr{B}^T$ 的像。

从而利用关联映射，我们可以证明图的圈空间和割空间互为正交补空间。

对于连通图，我们可以借助生成树描述圈空间与割空间。

定义 36

设 $G=(V,E)$ 是连通图，T 是 G 的一个生成树。对任意 $e\in E\setminus E(T)$，在 $T+e$ 中存在唯一的圈 C_e，这些圈称为 G 关于 T 的**基本圈**。对任意 $f\in E(T)$，$T-f$ 恰好有两个连通分支，这两个连通分支之间的边形成了 G 的一个割，这些割称为 G 关于 T 的**基本割**。

定理 37

设 $G=(V,E)$ 是具有 n 个顶点和 m 条边的连通图，T 是 G 的一个生成树，则：

(i) G 关于 T 的基本圈和基本割分别构成 $\mathcal{C}(G)$ 和 $\mathcal{B}(G)$ 的基；

(ii) $\dim\mathcal{C}(G)=m-n+1, \dim\mathcal{B}(G)=n-1$。

二部图

定义 38

设 k 是一个正整数，如果 G 的顶点集 V 可以划分成 k 个独立顶点集，则称 G 是 k-**部图**。2-部图又称**二部图**或**二分图**。
如果在 k-部图中包含了 k 部之间的所有边，则称其为**完全** k-**部图**。各部顶点数量分别为 $n_1, n_2, \cdots, n_k$ 的完全 k 部图记作 $K_{n_1,n_2,\cdots,n_k}$。

通常来说，当我们提到一个图是 k-部图时，都默认同时给出了顶点集的划分。
一般来说，判定一个图是不是 k-部图是一个困难的问题，但对于二部图的情况则相对简单，我们可以利用深度有限搜索树证明，

定理 39

一个图是二部图当且仅当它不含长度为奇数的圈。

子式

定义 40

在图 X 的某些边上插入若干新的顶点，或更严格的，将 X 的某些边替换成具有相同端点的路径，所得的的图称为 TX。如果图 Y 包含一个 TX 子图，则称 X 是 Y 的**拓扑子式**。

定义 41

将图 X 的每个顶点 x 替换成不相交的连通图 G_x, 并将 X 的边 xy 替换为 $G_x - G_y$ 边的非空集合，所得的图称为 IX。如果图 Y 包含一个 IX 子图，则称 X 是 Y 的**子式**。

定义 42

如果 G 是一个 IX，则 $P = \{V_x | x \in X\}$ 是 $V(G)$ 的一个划分，且 X 可以看做 G 由 P **收缩**得到的，记作 $X = G/P$。如果 $U = V_x$ 是 P 中唯一的非单顶点集，则可记作 $X = G/U$。如果 U 恰好包含一条边 e 的两个端点，即 $U = e$，我们称 X 是 G **收缩边** e 得到的，记作 $X = G/e$。

匹配

定义 43

图 G 中独立边集 $M \subseteq E$ 称为**匹配**。对 $U \subseteq V$，如果 U 中所有顶点都与 M 中的一条边关联，则称 M 是一个 U 的**匹配**。与 M 中所有边均不关联的顶点称为**非匹配顶点**。

图 G 的 k-正则生成子图称为 k-**因子**。于是 H 是 G 的 1-因子等价于 $E(H)$ 是 $V(G)$ 的匹配。接下来我们将讨论具有 1-因子的图所满足的性质。

二部图匹配

接下来我们讨论二部图的匹配问题，在这里我们假定 $G=(V,E)$ 是一个具有顶点集的划分 $V=A\cup B$ 的二部图。
如果一个顶点集 $U\subseteq V$ 满足 E 中任意一条边存在一个在 U 中的端点，则称 U 是 G 的一个**顶点覆盖**，利用 Menger 定理可以直接导出如下结果，

定理 44 (König)

G 中匹配的最大基数等于顶点覆盖的最小基数。

由此我们不难证明，

定理 45 (Hall)

G 有 A 的匹配当且仅当对任意 $S\subseteq A$ 均有 $|N(S)|\geq|S|$。

利用 Hall 定理我们不难证明，

定理 46

对正整数 k，k-正则二部图包含 1-因子，$2k$-正则图包含 2-因子。

一般图匹配

定理 47 (Tutte)

图 G 有 1-因子当且仅当对所有 $S \subseteq V(G)$，$G - S$ 的奇连通分支个数不超过 $|S|$。

证明.

只需在 G 不含 1-因子时找到一个与 Tutte 条件相悖的集合 $S \subseteq V$。当 $|V|$ 是奇数时，取 $S = \varnothing$ 即可，以下假设 $|V|$ 是偶数。
不妨设 G 是边极大的，令 S 是所有度为 $|V| - 1$ 的顶点的集合。只需考虑 S 满足 Tutte 条件的情况，此时存在 $G - S$ 的一个连通分支不是完全图，则存在这一连通分支中的三个顶点 a, b, c 使得 $ab, bc \in E, ac \notin E$。由于 $b \notin S$，则存在 $d \in V$ 使得 $bd \notin E$，考察图 $G + ac$ 与图 $G + bd$，由 G 的边极大性分别存在 1-因子 M_1, M_2。考察两者的对称差 $M_1 \triangle M_2$，这是若干个不相交圈的并，且包含边 ac, bd。设 bd 在圈 C 上，如果 ac 不在 C 上，则 $M_2 \triangle C$ 是 G 的一个 1-因子；如果 ac 在 C 上，不妨设圈 C 为 $bdPacQ$，其中 P, Q 分别为 $d - a, c - b$ 路径，则 $bdPab$ 是一个不含 ac 的圈，且 $M_2 \triangle bdPab$ 是 G 的 1-因子。这与我们的假设矛盾。 □

顶点染色

定义 48

图 G 的 k-**（顶点）染色**是一个映射 $c: V \to \{1, 2, \cdots, k\}$，使得对任意两个相邻的顶点 $x, y \in V$ 都有 $c(x) \neq c(y)$。
使得图 G 存在 k-染色的最小正整数 k 称为图 G 的**（顶点）色数**，记作 $\chi(G)$。

图的一个 k-染色实质上相当于将顶点集划分为 k 个独立集，而正如我们之前所提到的，一般情况下计算图的色数是一个困难的问题，不过选择适当的顺序使用贪心的策略可以证明，

定理 49

$\chi(G) \leq 1 + \max_{H \subseteq G} \delta(H)$。

而作为一个特例，我们可以得到 $\chi(G) \leq 1 + \Delta(G)$，这一结果可以进行一点改进，

定理 50 (Brooks)

若连通图 G 不是奇圈或完全图，则 $\chi(G) \leq \Delta(G)$。

边染色

定义 51

图 G 的 k-**边染色是一个映射** $c : E \to \{1, 2, \cdots, k\}$，**使得对任意两条相邻的边** $x, y \in V$ **都有** $c(x) \neq c(y)$。
使得图 G 存在 k-边染色的最小正整数 k 称为图 G 的**边色数**，记作 $\chi'(G)$。

定理 52 (König)

若 G 是二部图，则 $\chi'(G) = \Delta(G)$。

证明.

将 G 扩充称 $\Delta(G)$ -正则二部图，从而其有 1 -因子分解，对不同 1 -因子中的边染不同颜色即可。 □

定理 53 (Vizing)

图 G 的边色数满足 $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$。

色多项式

定义 54

图 G 的 k-顶点染色 $V \to \{1, 2, \cdots, k\}$ 的数量称为 G 的 **k-染色方案数**，记作 $P_G(k)$。

利用如下结果，我们可以对边归纳式的计算 $P_G(k)$。

定理 55

设 e 是图 G 的一条边，则 $P_G(k) = P_{G-e}(k) - P_{G/e}(k)$。

由此我们不难证明对一个图 G，$P_G(k)$ 是 k 的 $|V|$ 次多项式。

定义 56

P_G 称为图 G 的**色多项式**。

欧氏平面的拓扑

我们简单的介绍欧氏平面的拓扑性质，以帮助我们处理平面图相关的问题。

定义 57

设 X, Y 是 $\mathbb{R}^2$ 的子集，如果映射 $f\colon X \to Y$ 满足对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得当 $x_1, x_2 \in X$ 且 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时，有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$，则称映射 f 是**连续**的。
设 X, Y 是 $\mathbb{R}^2$ 的子集，$f\colon X \to Y$ 是一一映射，如果 f 和 f^{-1} 都是连续的，则称 X, Y 是**同胚**的，f 称为 X, Y 的**同胚映射**。
设 $f\colon [0,1] \to P$ 为连续映射，则称 P 为 $f(0), f(1)$ 之间的**道路**，$f(0), f(1)$ 称为 P 的**端点**。如果 f 为同胚映射，则称 P 为**弧**。
如果 X 是 $\mathbb{R}^2$ 的子集，且对任意 $x, y \in X$，存在 X 中以 x, y 为端点的道路，则称 X **道路连通**。X 的极大道路连通子集称为 X 的道路连通分支。
如果 X 是 $\mathbb{R}^2$ 的子集，点 $x \in \mathbb{R}^2$ 满足对任意 $\varepsilon > 0$，开圆盘 $B(x, \varepsilon)$ 中都包含 X 和 $\mathbb{R}^2 \setminus X$ 中的点，则称 x 是 X 的**边界点**。X 的边界点的全体称为 X 的**边界**，记作 ∂X。

我们不加证明的引用如下这一直观的定理，

定理 58 (Jordan 曲线定理)

若 J 同胚于单位圆周 S^1，则 $\mathbb{R}^2 \setminus J$ 恰有两个以 J 为边界的道路连通分支。

平面图

定义 59

平面图是具有下列性质的有限集合的二元组 (V, E):

(i) $V \subseteq \mathbb{R}^2$;

(ii) 每条边是两个顶点之间的弧;

(iii) 不同的边具有不同的端点集合;

(iv) 每一条边的内部不包含顶点和其他边的点。

平面图 (V, E) 自然的定义了 V 上的一个图 G,在不引起混淆的情况下我们通常不对二者进行区分。对一个平面图 G,我们通常也不区分 G 和它在平面上的点集 $V \cup \left(\bigcup_{e\in E} e\right)$。

对平面图 G,我们将 $\mathbb{R}^2 \setminus G$ 的道路连通分支称为 G 的**面**,G 的所有面的集合记作 $F(G)$。我们将 G 唯一的一个无界面称为 G 的**外部面**,而将其他面称为 G 的**内部面**。在大多数情况下,我们并不需要区分平面图的外部面和内部面,此时我们通常使用球面 S^2 代替平面 $\mathbb{R}^2$ 来强调两者的统一性。

平面图

关于平面图的面，我们有如下一些基本的结果。

定理 60

设 f 是平面图 G 的一个面，则 ∂f 是 G 的子图，且 f 是 ∂f 的一个面。

定理 61

一个平面森林恰好只有一个面。

定理 62

如果平面图 G 存在两个不同的面具有相同的边界，则 G 是一个圈。

定理 63

2-连通平面图 G 的每个面的边界是 G 的一个圈。

定理 64 (Euler 公式)

设连通平面图 G 具有 n 个顶点，m 条边和 l 个面，则 $n - m + l = 2$。

极大平面图

定义 65

如果一个平面图 G 不能再添加一条边仍然是平面图，则称 G 是**极大平面图**。如果平面图 G 的每个面的边界都是 G 中的三角形，则称 G 是**平面三角剖分**。

利用 Jordan 曲线定理可以证明，

定理 66

如果 G 的顶点数不小于 3，则 G 是极大平面图当且仅当 G 是平面三角剖分。

由此利用 Euler 公式可得，

定理 67

具有 $n \geq 3$ 个顶点的平面图至多有 $3n-6$ 条边，具有 $n \geq 3$ 个顶点的极大平面图恰好有 $3n-6$ 条边。

于是我们不难证明，

定理 68

平面图 G 不包含 $K_{3,3}, K_5$ 作为拓扑子式。

可平面图

定义 69

如果图 G 和一个平面图同构，则称 G 是**可平面图**。如果 G 是可平面图，且不能添加边扩充成更大的可平面图，则称 G 是**极大可平面图**。

利用极大平面图的知识，我们不难得到，

定理 70

具有 $n \geq 3$ 个顶点的可平面图是极大可平面的当且仅当它有 $3n-6$ 条边。

有关可平面图的判定，我们有如下惊人的事实，

定理 71 (Kuratowski)

图 G 是可平面的当且仅当 G 不包含 $K_{3,3}, K_5$ 作为拓扑子式。

G 是 3-连通图的情况可以利用收缩边进行归纳证明，而一般的情况也可以通过一些细致的讨论转化为 3-连通的情况。

极图理论

图的整体性质有时会对图的局部性质产生影响，这其中的许多问题是极图理论研究的重要组成部分。
在这里，我们主要考察这样一个问题：设 H 是一个顶点数不少于 n 的图，则需要多少边才能保证所得的顶点数为 n 的图一定包含子图 H？我们也可以将问题用另一种形式表述，

定义 72

设 H 为至少有一条边的图，如果一个包含 n 个顶点的图 G 不包含子图 H，且其包含了最多可能的边数，则称 G 关于 n, H 是**极值**的，其边数记作 $\mathrm{ex}(n, H)$。

Turán 定理

我们考察 $H = K_r (r > 1)$ 的情况，此时完全 $r - 1$ -部图是一种自然的选择。

定义 73

顶点数为 n 且满足划分的各部分顶点数之多相差 1 的完全 r-部图称为 **Turán 图**，记作 $T_r(n)$，其边数记作 $t_r(n)$。

以下的定理表明 $T_{r-1}(n)$ 关于 n, K_r 确实是极值的，

定理 74 (Turán)

设 $r > 1, n$ 为正整数，每个顶点数为 n 、边数为 $\mathrm{ex}(n, K_r)$ 且不包含子图 K_r 的图 G 是 $T_{r-1}(n)$。

证明.

当 $n \leq r - 1$ 时，有 $G = K_n = T_{r-1}(n)$。当 $n \geq r$ 时，由于 G 是极值的，从而 G 包含 K_{r-1} 子图 K，则由归纳假设 $G - K$ 至多有 $t_{r-1}(n - r + 1)$ 条边，且 $G - K$ 的每个顶点不能和 K 的所有顶点相邻，于是 G 的边数至多 $t_{r-1}(n - r + 1) + (n - r + 1)(r - 2) + \frac{(r-1)(r-2)}{2} = t_{r-1}(n)$ 条。容易验证当 G 恰好有 $t_{r-1}(n)$ 条边时，G 是 $T_{r-1}(n)$。 □

Turán 定理

对于一般的情况，我们有，

定理 75

如果图 H 至少含有一条边，则

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{ex}(n, H)\binom{n}{2}^{-1} = \frac{\chi(H)-2}{\chi(H)-1}$$

利用 Turán 定理不难验证 $H = K_r$ 的情况，而这一结果指出当 H 是二部图时只需要远比 $\binom{n}{2}$ 少的边数就能保证子图 H 存在。事实上此时有，

定理 76

存在依赖于 r 的常数 c_1, c_2，使得

$$c_1 n^{2-\frac{2}{r+1}} \leq \mathrm{ex}(n, K_{r,r}) \leq c_2 n^{2-\frac{1}{r}}$$

其中上界可以通过算两次的技巧得到，而下界可以利用随机图的方法得到。

Hamilton 圈

定义 77

图 G 包含 V 中所有顶点的圈称为 **Hamilton 圈**。

下面这个定理是有关 Hamilton 圈理论的一个重要的经典结果，

定理 78 (Dirac)

具有 $n \geq 3$ 个顶点且最小度至少为 $n/2$ 的图 G 包含 *Hamilton* 圈。

证明.

不难证明 G 是连通的。设 $P = v_0 \cdots v_k$ 是 G 最长的路径，由于 P 的长度至多 $n-1$，则存在 P 中一条边 $v_i v_{i+1}$ 使得 v_0, v_{i+1} 相邻且 v_i, v_k 相邻，从而可以将 P 扩展称长度为 k 的圈。由 P 的最长性，这就是 G 的 Hamilton 圈。 $\square$

事实上这里证明了更强一些的结果，

定理 79 (Ore)

具有 $n \geq 3$ 个顶点且任意不相邻顶点对的度之和至少为 n 的图 G 包含 *Hamilton* 圈。