树论的基本概念及相关定义

符水波

宁波市镇海中学

1 关于树论

2 树的定义

3 树的存储

树论（tree theory），是图论的一个分支。它以树这一种特殊的图为研究对象。信息学中，题目通常会给定一棵树和一些其他参数，运用树的直径、重心、最近公共祖先、dfs 序等的性质，通过树形动规、树上差分、树链剖分以及分治等算法技巧，求解一个或多个这棵树上的问题。有时也会给定一些条件，求解关于满足这些条件的树集的问题。

- 树：包含 $n(n \in \mathbb{N})$ 个结点的无环联通图。由此可知，对于 $n \in \mathbb{N}^+$，n 个结点的树具有 $n-1$ 条边。（注："结点"也常见为"节点"，后文中引用部分自动修改（好像原文都是后者），无备注）
- 有根树
  - 根：一个特定的结点，没有父亲结点。
  - 父亲（记作 par）：除根以外的每个结点，有且仅有一个结点为它的父亲，且与父亲之间有一条边相连。且对于任意一条边，都满足其中一个顶点为另一个顶点的父亲。
  - 孩（儿）子（记作 son）：若结点 p 是结点 u 的父亲，则 u 是 p 的孩子，反之亦然。
  - 祖先：父亲或父亲的祖先，根没有祖先结点。有时含自身结点。
  - 后代：孩子或孩子的后代，叶没有后代结点。有时含自身结点。

- 有根树
  - 子树：包含自己与后代结点及其对应边的子图。
  - 叶：没有孩子结点的结点。
  - 分支节点：有孩子结点的结点。
  - 深度：每个结点的深度为其父亲结点的深度 $+1$，根节点的深度一般为 1。树的深度为所有结点深度的最大值。
  - 层：深度相同的节点的集合。
  - 高度：每个结点的高度为其儿子节点的高度 $+1$ 的最大值，叶结点的高度一般为 1。树的高度为根节点的高度。
  - lca（最近公共祖先）：两个（或多个）结点的公共祖先中深度最大（距离每个结点最近）的一个。

- 无根树：没有限定根的树。
- 森林：若干棵不相交的树的集合。
- 二叉树：每个结点最多含有两个儿子的树。
  - 左右儿子：每个节点的儿子分为左儿子和右儿子。
- 完全二叉树：若深度为 k，前 $k-1$ 层中第 i 层含有 2^{i-1} 个节点，且可以通过将根节点标为 1 号，i 节点的左儿子标为 $2i$ 号，右儿子标为 $2i+1$ 号。
- 满二叉树：树的第 i 层含有 2^{i-1} 个结点。

众所周知，由于完全动态分配内存，vector 等 STL 容器的常数巨大，可能会在一些时限较紧的题目出现超时现象。

我们考虑两种方法：

1. 由定义，树是一种特殊的图，因此可以和图一样存储，不详细赘述。
2. 有根树（无根树可任选一个做根）对于每个结点存储父亲或孩子。

都比较简单，可根据实际情况选取一种。

大多数题目不提供孩子父亲关系，只提供边的关系，故一般使用第一种。