博弈论

realskc

2024 特长生，冲刺 NOIP

2024 年 8 月 6 日

Nim 游戏

有 n 堆石子，第 i 堆里共有 a_i 枚石子。两人轮流操作，一次操作可以挑一堆，并从中取走至少一枚石子，不能操作者输。求先手必胜还是后手必胜。

$1 \leq n \leq 10^6, 1 \leq a_i \leq 10^9$。

结论

如果所有 a_i 的异或和为 0，则先手必败，否则先手必胜。

证明只需验证，必败态只能转移到必胜态，必胜态必然能转移到必败态。

P1247 取火柴游戏

给定一个 Nim 游戏的局面，请判断是先手必胜还是后手必胜。如果先手必胜，则输出第一步该怎么取。

$n \leq 5 \times 10^5, a_i \leq 10^9$。

题解

令所有 a_i 的异或和为 S。枚举每一个 a_i，如果 $a_i \oplus S < a_i$，则把 a_i 变为 $a_i \oplus S$。

Anti-Nim 游戏

有 n 堆石子，第 i 堆里共有 a_i 枚石子。两人轮流操作，一次操作可以挑一堆，并从中取走至少一枚石子，不能操作者获胜。求先手必胜还是后手必胜。

$1 \le n \le 10^6, 1 \le a_i \le 10^9$。

结论

令 S 表示所有 a_i 的异或和，如果所有 a_i 都 ≤ 1，则令 $S \leftarrow S \oplus 1$。此时，先手必胜当且仅当 $S \neq 0$。

CF1965A Everything Nim

Alice 和 Bob 在用 n 堆石子做游戏。在其中一位玩家的回合里，他可以选择一个正整数 k，并从目前所有非空堆中移除 k 颗石子（k 不能超过当前所有非空堆中石子数量的最小值）。当一名玩家在他的回合中无法进行操作时（此时所有石子堆都是空的），即判负。

现在给出 n 堆石子的初始石子数，已知 Alice 先手且两人都足够聪明，请你判断最后谁会获胜。

T 组数据，$T \le 10^4$，$\sum n \le 2 \times 10^5$。

题解

考虑那些把某堆石子清零的操作，它们把整个取石子的过程划分成了若干个阶段。具体地，我们可以把原游戏重述如下：

给定序列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，满足 $0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n$。有一个数 x，初始 $x = 0$。对于一次操作，令当且序列 a 中第一个 $> x$ 的元素是 a_i，则可以将 x 变为 $[x + 1, a_i]$ 中的任意整数。把 x 变为 a_n 者胜。

题解

考虑那些把某堆石子清零的操作，它们把整个取石子的过程划分成了若干个阶段。具体地，我们可以把原游戏重述如下：

给定序列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，满足 $0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n$。有一个数 x，初始 $x = 0$。对于一次操作，令当且序列 a 中第一个 $> x$ 的元素是 a_i，则可以将 x 变为 $[x+1, a_i]$ 中的任意整数。把 x 变为 a_n 者胜。

令 f_i 表示，当 $x = a_i$ 时，先手是否必胜。有 $f_n = 0$。考虑通过 f_{i+1} 计算 f_i，当 $a_{i_1} - a_i \geq 2$ 时，$f_i = 1$。因为此时如果 $f_{i+1} = 0$，则先手可以直接把 x 变为 a_{i+1} 使得后手必败；如果 $f_{i+i} = 1$，则可以把 x 变为 $a_{i+1} - 1$，后手仍然必败。

当 $a_{i+1} = a_i + 1$ 时，有 $f_i = f_{i+1} \oplus 1$。

P4279 [SHOI2008] 小约翰的游戏

Anti-Nim 模板题。

公平组合游戏

公平组合游戏的定义如下：

- 游戏有两个人参与，二者轮流做出决策，双方均知道游戏的完整信息。
- 任意一个游戏者在某一确定状态可以作出的决策集合只与当前的状态有关，而与游戏者无关。
- 游戏中的同一个状态不可能多次抵达，游戏以玩家无法行动为结束，无法行动者输，且游戏一定会在有限步后以非平局结束。

游戏中状态也被称为局面。

在公平组合游戏中，如果双方都采取最优策略，则游戏的胜负只与局面有关。并且，由于局面对两个游戏者都是一样的，因此局面直接决定了先手必胜还是后手必胜。

在公平组合游戏中，如果双方都采取最优策略，则游戏的胜负只与局面有关。并且，由于局面对两个游戏者都是一样的，因此局面直接决定了先手必胜还是后手必胜。

如果一个局面先手必胜，则称之为 N 型局面；如果一个局面先手必败，则称之为 P 型局面。

在公平组合游戏中，如果双方都采取最优策略，则游戏的胜负只与局面有关。并且，由于局面对两个游戏者都是一样的，因此局面直接决定了先手必胜还是后手必胜。

如果一个局面先手必胜，则称之为 N 型局面；如果一个局面先手必败，则称之为 P 型局面。

当玩家进行操作后，局面会发生变化。对于一个局面 A，如果玩家能通过一次操作使得局面 A 变为局面 B，则称局面 A 可以转移到局面 B。根据公平组合游戏的定义，所有局面的转移关系构成 DAG。

SG 函数

对于一个公平组合游戏（双方可行的操作相同），可以对一个局面计算它的 SG 值。

一个局面的 SG 值定义为它能转移到的所有局面的 SG 值的 mex。其中 $\operatorname{mex} S$ 表示最小的不在 S 中的非负整数。

SG 函数

对于一个公平组合游戏（双方可行的操作相同），可以对一个局面计算它的 SG 值。

一个局面的 SG 值定义为它能转移到的所有局面的 SG 值的 mex。其中 $\mathrm{mex}\, S$ 表示最小的不在 S 中的非负整数。

此时，如果一个局面的 SG 值为 0 则先手必败，不为 0 则先手必胜。

重要性质：两个局面合并后产生的新局面的 SG 值即为原先两个局面 SG 值的异或。

SG 函数

对于一个公平组合游戏（双方可行的操作相同），可以对一个局面计算它的 SG 值。

一个局面的 SG 值定义为它能转移到的所有局面的 SG 值的 mex。其中 $\mathrm{mex}\,S$ 表示最小的不在 S 中的非负整数。

此时，如果一个局面的 SG 值为 0 则先手必败，不为 0 则先手必胜。

重要性质：两个局面合并后产生的新局面的 SG 值即为原先两个局面 SG 值的异或。

一个局面是先手必胜局面当且仅当它的 SG 值不为 0。

例题

给定 n 个正整数 a_i，两人轮流操作，每次操作可以选择一个正整数 a_i，把它变成 $a_i - 1$ 或变成两个数 i, j，满足 $1 \leq i, j < a_i$ 且 $i + j = a_i$，不可操作者输。求先手必胜还是后手必胜。

$n \leq 10^6, a_i \leq 10^4$。

题解

令 $f[x]$ 表示一个数 x 的 SG 函数值，则 $f[x]$ 所有能转移到的状态为 $f[x-1]$ 和 $f[i] \oplus f[x-i]$（$1 \leq i < x$），取 mex 即可得到 $f[x]$ 的值。

[HNOI2007] 分裂游戏

有 n 个瓶子，第 i 个瓶子里有 p_i 颗巧克力豆，两个人轮流操作。每次操作需要选定三个数 i,j,k，要求 $1 \le i < j \le k \le n$ 且第 i 个瓶子里至少有 1 颗巧克力豆，然后从第 i 个瓶子里取出一颗豆，在第 j 和第 k 个瓶子中都加入一颗豆。无法操作者输，求先手必胜还是后手必胜。

$1 \le n \le 21, 0 \le p_i \le 10^4$。

对每一颗豆分开考虑，令 f_i 表示一颗豆在位置 i 时的 SG 值。
当豆在位置 n 时，无法转移，SG 值为 0。

对每一颗豆分开考虑，令 f_i 表示一颗豆在位置 i 时的 SG 值。

当豆在位置 n 时，无法转移，SG 值为 0。

当豆在位置 i 时，可以转移至所有的 $i < j \le k$，其对应的 SG 值为 $f_j \oplus f_k$。因此 $f_i = \operatorname{mex}_{i<j\le k} f_j \oplus f_k$。

对每一颗豆分开考虑，令 f_i 表示一颗豆在位置 i 时的 SG 值。
当豆在位置 n 时，无法转移，SG 值为 0。
当豆在位置 i 时，可以转移至所有的 $i < j \leq k$，其对应的 SG 值为 $f_j \oplus f_k$。因此 $f_i = \text{mex}_{i<j\leq k} f_j \oplus f_k$。
对输入的局面计算所有豆子 SG 值的异或即可。

例题

初始有一块 $n \times m$ 的巧克力，两个玩家轮流行动。玩家每次可以选择一块巧克力，把它切成两部分。即，如果选定的巧克力原先是 $a \times b$ 的，则可以切成 $i \times b$ 和 $(a-i) \times b$（$1 \le i < a$）两块或 $a \times i$ 和 $a \times (b-i)$（$1 \le i < b$）两块。

先切出 1×1 的巧克力的人赢，给定 n, m，求先手必胜还是后手必胜。

$1 \le n, m \le 200$。

SG 函数只定义在公平组合游戏之上，它的结束条件必须是不能操作者输。因此，本题无法直接使用 SG 函数。

SG 函数只定义在公平组合游戏之上，它的结束条件必须是不能操作者输。因此，本题无法直接使用 SG 函数。

但我们可以稍作转化，使其变为公平组合游戏。注意到，如果一方切出了一条 $1 \times k$（$k > 1$）的巧克力，则对手下一步就可以直接切出 $1 \times k$ 并取胜。因此，我们可以把规则修改为“不能切出 $1 \times k$ 的巧克力”，此时游戏变为无法操作者输，可以使用 SG 函数计算。

有平局的情况

保持公平组合游戏的定义不变，但允许出现平局。此时，状态的转移不再是一个 DAG，而可能出现环。

有平局的情况

保持公平组合游戏的定义不变，但允许出现平局。此时，状态的转移不再是一个 DAG，而可能出现环。

我们从终止状态出发，倒推出每个状态的胜负情况。对于一个必败态，所有能到达它的点都是必胜态。如果一个点的能到的所有点都是必胜态，则它为必败态。该过程结束后，所有还未确定状态的点即为平局。

P9169 [省选联考 2023] 过河卒

爆搜出所有状态，然后在转移图上计算每种状态的胜负情况。

P3480 [POI2009] KAM-Pebbles

有 n 堆石子，第 i 堆石子有 a_i 个。初始保证 $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n$。

P3480 [POI2009] KAM-Pebbles

有 n 堆石子，第 i 堆石子有 a_i 个。初始保证 $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$。

两人轮流操作，每次操作可以从一堆石子中移走任意多石子，但是操作后必须仍然满足 $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$。谁没有石子可移时输掉游戏。问先手是否必胜。

P3480 [POI2009] KAM-Pebbles

有 n 堆石子，第 i 堆石子有 a_i 个。初始保证 $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n$。

两人轮流操作，每次操作可以从一堆石子中移走任意多石子，但是操作后必须仍然满足 $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n$。谁没有石子可移时输掉游戏。问先手是否必胜。

T 组数据，$T \le 10$，$1 \le n \le 1000$，$1 \le a_i \le 10000$。

阶梯 Nim

对原问题做一个转化，有 n 堆石子，石子数分别为 $a_n - a_{n-1}, a_{n-1} - a_{n-2}, \cdots, a_2 - a_1, a_1$。每次操作可以从第 i 堆（$i > 1$）选择一些石子放入第 $i-1$ 堆，或者从第一堆中取走一些石子。该问题被称为阶梯 Nim 问题。

阶梯 Nim

对原问题做一个转化，有 n 堆石子，石子数分别为 $a_n - a_{n-1}, a_{n-1} - a_{n-2}, \cdots, a_2 - a_1, a_1$。每次操作可以从第 i 堆（$i > 1$）选择一些石子放入第 $i-1$ 堆，或者从第一堆中取走一些石子。该问题被称为阶梯 Nim 问题。

对阶梯 Nim 问题，有结论：阶梯 Nim 问题的游戏结果与只看奇数堆的 Nim 游戏结果相同。

证明：和普通 Nim 相同，假如当前为必败态，必然只能转移至必胜态。假如当前为必胜态，则可以转移至必败态。

P2575 高手过招

也是阶梯 Nim。

P2490 [SDOI2011] 黑白棋

给定 n 堆石子，每次可以从 $1 \sim k$ 堆石子中取出任意多个，不可操作者输。

$n, k, a_i \leq 10^4$。

k-Nim

该问题被称为 k-Nim。k-Nim 游戏的结论是，先把每堆石子用二进制表示，再考虑二进制的每一位，把所有数的这一位相加并对 $k+1$ 取模。如果有数在模 $k+1$ 之后 $\neq 0$，则先手必胜，否则后手必胜。

k-Nim

该问题被称为 k-Nim。k-Nim 游戏的结论是，先把每堆石子用二进制表示，再考虑二进制的每一位，把所有数的这一位相加并对 $k+1$ 取模。如果有数在模 $k+1$ 之后 $\neq 0$，则先手必胜，否则后手必胜。

证明：如果是必败态，则必然会变为必胜态。如果是必胜态，则一定可以转移到必败态。其构造证明方法与朴素 Nim 游戏类似。

ABC278G Generalized Subtraction Game

交互题。给定 n, l, r。黑板上写有整数 $1 \dots n$。

你需要先决定先后手，然后你和交互库轮流操作。一次操作中你需要擦去连续的若干正整数（数目介于 $[l, r]$ 中，且所选择的数都未被擦去）。无法操作者负。

$1 \le n \le 2 \times 10^3$，$1 \le l \le r \le n$。

题解

首先，若存在 $k \in [l, r]$ 满足 $k \equiv n \pmod 2$，则可以先划掉中间的 k 个数然后做对称操作。

题解

首先，若存在 $k \in [l, r]$ 满足 $k \equiv n \pmod 2$，则可以先划掉中间的 k 个数然后做对称操作。

否则（即 $l = r, l \not\equiv n \pmod 2$），$O(n^2)$ 暴力求出 SG 值即可。

AGC017D Game on Tree

有一棵 N 个节点的树，节点标号为 $1, 2, \ , N$，边用 (x_i, y_i) 表示。Alice 和 Bob 在这棵树上玩游戏，Alice 先手，两人轮流操作：

选择一条树上存在的边，把它断开使树变成两个连通块。然后把不包含 1 号点的联通块删除。

当一个玩家不能操作时输，求谁获胜。

题解

我们对树计算 SG 值。对于一个 n 个点的链，它的 SG 值是 n。

题解

我们对树计算 SG 值。对于一个 n 个点的链，它的 SG 值是 n。
如果树形如若干条从根出发的链，则类似于多堆石子的 Nim 游戏。

题解

我们对树计算 SG 值。对于一个 n 个点的链，它的 SG 值是 n。

如果树形如若干条从根出发的链，则类似于多堆石子的 Nim 游戏。

因此，一个树的 SG 值，相当于只保留根的一个儿子的所有情况的 SG 值的异或。

题解

我们对树计算 SG 值。对于一个 n 个点的链，它的 SG 值是 n。

如果树形如若干条从根出发的链，则类似于多堆石子的 Nim 游戏。

因此，一个树的 SG 值，相当于只保留根的一个儿子的所有情况的 SG 值的异或。

可以用归纳法证明，在一棵树上方接一个点，它的 SG 值会加一。因此，如果令 f_x 表示 x 的子树的 SG 值，则有 $f_x = \bigoplus_{fa_v = x} (f_v + 1)$。

CF1704F Colouring Game

给定二进制序列 $s_{1\ldots n}$。

Alice 每次可以选择一对包含 0 的相邻位置令其变为 xx，Bob 每次可以选择一对包含 1 的相邻位置令其变为 xx。

Alice 先手，无法操作者负。求胜者。多测。$\sum n \le 5 \times 10^5$。

题解

若 0 和 1 的数目不同，则数位比较多的人必胜（先手持 0，后手持 1）。这是因为胜者必定能够保证自己的数位数目在任意时刻都不比对方少。

题解

若 0 和 1 的数目不同，则数位比较多的人必胜（先手持 0，后手持 1）。这是因为胜者必定能够保证自己的数位数目在任意时刻都不比对方少。

若 0 和 1 的数目相同，不难证明，双方必定会优先将 01 或 10 变为 xx。而首先不能如此操作的人以其他形式操作必定会使自己的数位数目少于对手，从而落败。

题解

若 0 和 1 的数目不同，则数位比较多的人必胜（先手持 0，后手持 1）。这是因为胜者必定能够保证自己的数位数目在任意时刻都不比对方少。

若 0 和 1 的数目相同，不难证明，双方必定会优先将 01 或 10 变为 xx。而首先不能如此操作的人以其他形式操作必定会使自己的数位数目少于对手，从而落败。

因此，原序列被划分成了若干个极长 01 交错连续段，每次可以从任意一段中擦去一对相邻位置并将其分裂成两段，无法操作者输。

题解

若 0 和 1 的数目不同，则数位比较多的人必胜（先手持 0，后手持 1）。这是因为胜者必定能够保证自己的数位数目在任意时刻都不比对方少。

若 0 和 1 的数目相同，不难证明，双方必定会优先将 01 或 10 变为 xx。而首先不能如此操作的人以其他形式操作必定会使自己的数位数目少于对手，从而落败。

因此，原序列被划分成了若干个极长 01 交错连续段，每次可以从任意一段中擦去一对相邻位置并将其分裂成两段，无法操作者输。

令 f_x 表示一个长为 x 的段的 SG 值，把表打出来会发现 f 具有长度为 34 的循环节。因此可以快速计算 f，对所有段进行异或即可得到答案。

P3179 [HAOI2015] 数组游戏

有一个长度为 n 的数组，数组上有一些格子是白的，有一些是黑的。然后两人轮流进行操作。

每次操作选择一个白色的格子，假设它的下标为 x。接着，选择一个大小在 $1 \cdots \frac{n}{x}$ 之间的整数 k，然后将下标为 $x, 2 \times x, \cdots, k \times x$ 的格子都进行颜色翻转（黑变白，白变黑）。不能操作的人输。

有 q 个询问，每个询问给定数组的初始状态（给出 m 个白格子的位置），你要求出对于这种初始状态先手是否有必胜策略。

$1 \leq n \leq 10^9$，$1 \leq q, m \leq 100$。

题解

如果我们把白格子看成这个位置上有一个棋子，黑格子看成没有棋子，则黑白翻转可以看成添加一个棋子。因为两个棋子的贡献会抵消，相当于一个无法操作的黑色格子。

因此，原问题可以看成，每次选择 x 位置的一个棋子，把它取走并在下标为 $x, 2\times x, \cdots, k\times x$ 的格子上添加一个棋子。

题解

如果我们把白格子看成这个位置上有一个棋子，黑格子看成没有棋子，则黑白翻转可以看成添加一个棋子。因为两个棋子的贡献会抵消，相当于一个无法操作的黑色格子。

因此，原问题可以看成，每次选择 x 位置的一个棋子，把它取走并在下标为 $x, 2\times x, \cdots, k\times x$ 的格子上添加一个棋子。

我们可以对棋子计算它的 SG 函数值。对于一个 x 位置的棋子，记它的 SG 值为 f_x。则有转移 $f_x = \operatorname{mex}\{f_{2x}, f_{2x}\oplus f_{3x}, f_{2x}\oplus f_{3x}\oplus f_{4x}, \cdots\}$。

题解

如果我们把白格子看成这个位置上有一个棋子，黑格子看成没有棋子，则黑白翻转可以看成添加一个棋子。因为两个棋子的贡献会抵消，相当于一个无法操作的黑色格子。

因此，原问题可以看成，每次选择 x 位置的一个棋子，把它取走并在下标为 $x, 2 \times x, \cdots, k \times x$ 的格子上添加一个棋子。

我们可以对棋子计算它的 SG 函数值。对于一个 x 位置的棋子，记它的 SG 值为 f_x。则有转移 $f_x = \text{mex}\{f_{2x}, f_{2x} \oplus f_{3x}, f_{2x} \oplus f_{3x} \oplus f_{4x}, \cdots\}$。

有重要结论：当 x, y 满足 $\left\lfloor \frac{n}{x} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{y} \right\rfloor$ 时，有 $f_x = f_y$。因此，只需要计算 $O(\sqrt{n})$ 个 SG 值。

虽然如此，但朴素方法计算单个 SG 值需要 $O(\sqrt{n})$ 的时间，总复杂度是 $O(n)$，仍然无法接受。

虽然如此，但朴素方法计算单个 SG 值需要 $O(\sqrt{n})$ 的时间，总复杂度是 $O(n)$，仍然无法接受。

对此，我们在转移的时候再做一次整除分块以优化复杂度。当计算 f_x 时，不同的 $\left\lfloor \frac{n}{ix} \right\rfloor$ 只有 $O\left(\sqrt{\frac{n}{x}}\right)$ 种。由于 SG 值的转移是前缀异或形式，因此一段 $\left\lfloor \frac{n}{ix} \right\rfloor$ 相同的区间至多只有两种不同的转移值，可以 $O\left(\sqrt{\frac{n}{x}}\right)$ 转移。

总复杂度 $O\left(\sum_{i=1}^{\sqrt{n}} \sqrt{i} + \sum_{i=1}^{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{n}{i}}\right) = O\left(n^{\frac{3}{4}}\right)$。

P8347 「Wdoi-6」另一侧的月

给定一棵大小为 n 的树。

两个人轮流操作。一次操作为：删去任意一个节点，并在剩余的若干连通块中选择一个保留。

无法操作（即操作前仅剩余唯一的节点）者胜。求胜者。多测。

$T \le 5$，$n \le 10^5$。

题解

可以通过找规律等方法得到结论：先手必胜当且仅当存在度数为偶数的节点。

题解

可以通过找规律等方法得到结论：先手必胜当且仅当存在度数为偶数的节点。

证明：若存在度数为偶数的节点，则选一个叶子作为根，就一定存在一个度数为偶数的节点，满足该点的子树内部没有度数为偶数的节点。删去该点的父亲并保留该点所在的子树，则可以用一次操作得到一棵度数全奇的树。而如果不存在度数为偶数的节点，则无论怎么操作都必定会得到一棵包含偶度点的树。