线段树及类似数据结构及相关应用

更多的相关题目

汪直方

宁波市镇海蛟川书院

2024 年 1 月 4 日

Problem（【SCOI2010】序列操作）

给定一个长度为 n 的 01 数组，q 次操作：

1. 区间赋 0，区间赋 1。
2. 区间反转（0 变 1，1 变 0）。
3. 求区间 1 的个数。
4. 求区间最长的连续 1 的长度。

$1 \leqslant n, q \leqslant 10^5$。

Problem（【SCOI2010】序列操作）

给定一个长度为 n 的 01 数组，q 次操作：

1. 区间赋 0，区间赋 1。
2. 区间反转（0 变 1，1 变 0）。
3. 求区间 1 的个数。
4. 求区间最长的连续 1 的长度。

$1 \leqslant n, q \leqslant 10^5$。

Solution

用线段树维护区间 $0,1$ 的个数，区间 $0,1$ 的最长连续前、后缀和最长连续段。

Problem（【SCOI2010】序列操作）

给定一个长度为 n 的 01 数组，q 次操作：

1. 区间赋 0，区间赋 1。
2. 区间反转（0 变 1，1 变 0）。
3. 求区间 1 的个数。
4. 求区间最长的连续 1 的长度。

$1 \leqslant n, q \leqslant 10^5$。

Solution

用线段树维护区间 0,1 的个数，区间 0,1 的最长连续前、后缀和最长连续段。

时间复杂度 $\Theta(n + q\log n)$。

Problem (HDU6218 Bridge)

给定一个 $2 \times n$ 的网格图，q 次操作：加入或删除一条边，在每次操作后查询桥边数量。

$1 \leqslant n \leqslant 2 \times 10^5, 0 \leqslant q \leqslant 2 \times 10^5$。

Problem (HDU6218 Bridge)

给定一个 $2 \times n$ 的网格图，q 次操作：加入或删除一条边，在每次操作后查询桥边数量。

$1 \leqslant n \leqslant 2 \times 10^5, 0 \leqslant q \leqslant 2 \times 10^5$。

Solution

考虑维护非桥边数量。

Problem (HDU6218 Bridge)

给定一个 $2 \times n$ 的网格图，q 次操作：加入或删除一条边，在每次操作后查询桥边数量。

$1 \leqslant n \leqslant 2 \times 10^5, 0 \leqslant q \leqslant 2 \times 10^5$。

Solution

考虑维护非桥边数量。

非桥边一定在一个简单环中，在 $2 \times n$ 的网格图中，简单环只可能是两条竖边及其之间的横边。

Problem (HDU6218 Bridge)

给定一个 $2 \times n$ 的网格图，q 次操作：加入或删除一条边，在每次操作后查询桥边数量。

$1 \leqslant n \leqslant 2 \times 10^5, 0 \leqslant q \leqslant 2 \times 10^5$。

Solution

考虑维护非桥边数量。

非桥边一定在一个简单环中，在 $2 \times n$ 的网格图中，简单环只可能是两条竖边及其之间的横边。

我们用 `set<pair<int,int> >` 维护上下都有横边的极大连续段，用线段树维护竖边，需要支持查询区间内存在竖边的数量以及最小位置与最大位置。

Problem (HDU6218 Bridge)

给定一个 $2\times n$ 的网格图，q 次操作：加入或删除一条边，在每次操作后查询桥边数量。

$1\leqslant n\leqslant 2\times 10^5, 0\leqslant q\leqslant 2\times 10^5$。

Solution

考虑维护非桥边数量。

非桥边一定在一个简单环中，在 $2\times n$ 的网格图中，简单环只可能是两条竖边及其之间的横边。

我们用 `set<pair<int,int> >` 维护上下都有横边的极大连续段，用线段树维护竖边，需要支持查询区间内存在竖边的数量以及最小位置与最大位置。

时间复杂度 $\Theta(n+q\log n)$。

Problem (【2018 Multi-University Training Contest 7】Reverse Game)

一个大小为 $n \times n$ 的 01 矩阵。q 次操作：

1. 将某一列异或上 1。
2. 将某个位置异或上 1。

每次操作后求有多少个 0 和 1 的连通块。
平均每秒 3 组数据，$2 \leqslant n \leqslant 200, 1 \leqslant q \leqslant 20000$。

Problem（【2018 Multi-University Training Contest 7】Reverse Game）

一个大小为 $n \times n$ 的 01 矩阵。q 次操作：

1. 将某一列异或上 1。
2. 将某个位置异或上 1。

每次操作后求有多少个 0 和 1 的连通块。

平均每秒 3 组数据，$2 \leqslant n \leqslant 200, 1 \leqslant q \leqslant 20000$。

Problem

对列建线段树，维护对应区间的列只考虑内部有多少个连通块及两侧位置的连通情况的并查集。

Problem（【2018 Multi-University Training Contest 7】Reverse Game）

一个大小为 $n \times n$ 的 01 矩阵。q 次操作：

1. 将某一列异或上 1。
2. 将某个位置异或上 1。

每次操作后求有多少个 0 和 1 的连通块。
平均每秒 3 组数据，$2 \leqslant n \leqslant 200, 1 \leqslant q \leqslant 20000$。

Problem

对列建线段树，维护对应区间的列只考虑内部有多少个连通块及两侧位置的连通情况的并查集。
时间复杂度 $\Theta(nq \log n)$。

Problem (SOJ18 简单题)

略。

Problem（【Ynoi2016】炸脖龙 I）

略。

Problem（【Ynoi2013】无力回天 NOI2017)

略。

Problem (51nod1766 树上的最远点对)

给出一棵 n 个结点树，q 次询问：给定 $[a, b], [c, d]$，求最大的 $\mathrm{dist}(x, y)$，满足 $a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant r$。

$1 \leqslant n, q \leqslant 10^5$。

Problem (51nod1766 树上的最远点对)

给出一棵 n 个结点树，q 次询问：给定 $[a,b],[c,d]$，求最大的 $\text{dist}(x,y)$，满足 $a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant r$。

$1 \leqslant n,q \leqslant 10^5$。

Solution

可以证明，若 (a,b) 满足在一个区间中距离最大，(c,d) 满足在另一个区间中距离最大，则这两个区间中各取一个结点的最大距离一定在 $\text{dist}(a,c),\text{dist}(a,d),\text{dist}(b,c),\text{dist}(b,d)$ 四者之一。

Problem (51nod1766 树上的最远点对)

给出一棵 n 个结点树，q 次询问：给定 $[a,b],[c,d]$，求最大的 $\operatorname{dist}(x,y)$，满足 $a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant r$。

$1 \leqslant n, q \leqslant 10^5$。

Solution

可以证明，若 (a,b) 满足在一个区间中距离最大，(c,d) 满足在另一个区间中距离最大，则这两个区间中各取一个结点的最大距离一定在 $\operatorname{dist}(a,c),\operatorname{dist}(a,d),\operatorname{dist}(b,c),\operatorname{dist}(b,d)$ 四者之一。

用线段树维护每个结点对应区间的直径即可。

Problem (51nod1766 树上的最远点对)

给出一棵 n 个结点树，q 次询问：给定 $[a, b], [c, d]$，求最大的 $\operatorname{dist}(x, y)$，满足 $a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant r$。

$1 \leqslant n, q \leqslant 10^5$。

Solution

可以证明，若 (a, b) 满足在一个区间中距离最大，(c, d) 满足在另一个区间中距离最大，则这两个区间中各取一个结点的最大距离一定在 $\operatorname{dist}(a, c), \operatorname{dist}(a, d), \operatorname{dist}(b, c), \operatorname{dist}(b, d)$ 四者之一。

用线段树维护每个结点对应区间的直径即可。

时间复杂度 $\Theta(n + q \log n)$。

Problem（【Ynoi2015】纵使日薄西山）

略。

Problem（【ZJOI2019】线段树)

略。

Problem（【ZJOI2020】传统艺能）

略。

Problem (SOJ184 逆序对)

略。

Problem (LOJ6234 彩色弹珠)

给定一个长度为 n 的数组 a，定义一个区间的价值为其中只出现一次的数的个数，求所有区间的价值最大值。

$1 \leqslant a_i \leqslant n \leqslant 3 \times 10^5$。

Problem (LOJ6234 彩色弹珠)

给定一个长度为 n 的数组 a，定义一个区间的价值为其中只出现一次的数的个数，求所有区间的价值最大值。

$1 \leqslant a_i \leqslant n \leqslant 3 \times 10^5$。

Solution

我们从左到右枚举区间的右端点，用线段树对每个左端点维护区间的价值。

Problem (LOJ6234 彩色弹珠)

给定一个长度为 n 的数组 a，定义一个区间的价值为其中只出现一次的数的个数，求所有区间的价值最大值。

$1 \leqslant a_i \leqslant n \leqslant 3 \times 10^5$。

Solution

我们从左到右枚举区间的右端点，用线段树对每个左端点维护区间的价值。

每右移一个右端点做一次区间减一和一次区间加一即可。

Problem (LOJ6234 彩色弹珠)

给定一个长度为 n 的数组 a，定义一个区间的价值为其中只出现一次的数的个数，求所有区间的价值最大值。

$1 \leqslant a_i \leqslant n \leqslant 3 \times 10^5$。

Solution

我们从左到右枚举区间的右端点，用线段树对每个左端点维护区间的价值。

每右移一个右端点做一次区间减一和一次区间加一即可。

时间复杂度 $\Theta(n \log n)$。

Problem (【Ynoi2012】NOIP2015 充满了希望)

一个长度为 n 的数组 a，初始均为 0。给定 m 个操作：

1. 给定 $i, j \in [1, n] \cap \mathbb{N}$，交换 a_i 与 a_j。
2. 给定 $[l, r] \subseteq [1, n]$ 与 x，对于 $i \in [l, r] \cap \mathbb{N}$，执行 $a_i \leftarrow x$。
3. 给定 $p \in [1, n] \cap \mathbb{N}$，查询 a_p。

q 次询问：给定 $[l, r] \subseteq [1, m]$，求初始序列经过 $[l, r] \cap \mathbb{N}$ 中的操作后查询操作的答案之和。

$1 \leqslant n, m, q \leqslant 10^6$。

Problem (【Ynoi2012】NOIP2015 充满了希望)

一个长度为 n 的数组 a，初始均为 0。给定 m 个操作：

1. 给定 $i, j \in [1, n] \cap \mathbb{N}$，交换 a_i 与 a_j。
2. 给定 $[l, r] \subseteq [1, n]$ 与 x，对于 $i \in [l, r] \cap \mathbb{N}$，执行 $a_i \leftarrow x$。
3. 给定 $p \in [1, n] \cap \mathbb{N}$，查询 a_p。

q 次询问：给定 $[l, r] \subseteq [1, m]$，求初始序列经过 $[l, r] \cap \mathbb{N}$ 中的操作后查询操作的答案之和。

$1 \leqslant n, m, q \leqslant 10^6$。

Solution

我们从左到右枚举右端点，用一棵线段树维护每个左端点的答案，用一棵线段树维护序列每个位置的值关于左端点的分段函数。

Solution

我们考虑右移右端点一个位置插入的操作对维护内容产生的影响。

Solution

我们考虑右移右端点一个位置插入的操作对维护内容产生的影响。

对于一个区间赋值操作，我们需要将序列中这个区间的值改为左端点不超过当前位置则为修改的值否则为初始值。

Solution

我们考虑右移右端点一个位置插入的操作对维护内容产生的影响。

对于一个区间赋值操作，我们需要将序列中这个区间的值改为左端点不超过当前位置则为修改的值否则为初始值。

对于交换操作，我们需要将序列中这两个位置的值改为左端点不超过当前位置则为另一个当前的分段函数否则为初始值。

Solution

我们考虑右移右端点一个位置插入的操作对维护内容产生的影响。

对于一个区间赋值操作，我们需要将序列中这个区间的值改为左端点不超过当前位置则为修改的值否则为初始值。

对于交换操作，我们需要将序列中这两个位置的值改为左端点不超过当前位置则为另一个当前的分段函数否则为初始值。

注意到分段函数始终为不超过一个值则为另一个值否则为 0 的形式。

Solution

我们考虑右移右端点一个位置插入的操作对维护内容产生的影响。

对于一个区间赋值操作，我们需要将序列中这个区间的值改为左端点不超过当前位置则为修改的值否则为初始值。

对于交换操作，我们需要将序列中这两个位置的值改为左端点不超过当前位置则为另一个当前的分段函数否则为初始值。

注意到分段函数始终为不超过一个值则为另一个值否则为 0 的形式。

对于查询操作，我们在维护答案的线段树上进行区间加即可。

Solution

我们考虑右移右端点一个位置插入的操作对维护内容产生的影响。

对于一个区间赋值操作，我们需要将序列中这个区间的值改为左端点不超过当前位置则为修改的值否则为初始值。

对于交换操作，我们需要将序列中这两个位置的值改为左端点不超过当前位置则为另一个当前的分段函数否则为初始值。

注意到分段函数始终为不超过一个值则为另一个值否则为 0 的形式。

对于查询操作，我们在维护答案的线段树上进行区间加即可。

时间复杂度 $\Theta(n+(m_1+m_2)\log n+(m_3+q)\log m)$。

Problem (区间 lcm)

给定一个长度为 n 的数组 a，q 次询问一个区间的最小公倍数 $\bmod 998244353$。

$1 \leqslant n, m \leqslant 2 \times 10^5, 1 \leqslant a_i \leqslant 10^7$。

Problem (区间 lcm)

给定一个长度为 n 的数组 a，q 次询问一个区间的最小公倍数 $\bmod 998244353$。

$1 \leqslant n, m \leqslant 2 \times 10^5, 1 \leqslant a_i \leqslant 10^7$。

Solution

我们考虑离线，从小到大枚举右端点，用线段树以左端点为下标维护区间答案。

Problem (区间 lcm)

给定一个长度为 n 的数组 a，q 次询问一个区间的最小公倍数 $\bmod 998244353$。

$1 \leqslant n, m \leqslant 2 \times 10^5, 1 \leqslant a_i \leqslant 10^7$。

Solution

我们考虑离线，从小到大枚举右端点，用线段树以左端点为下标维护区间答案。

我们可以对每个质因子开一个单调栈维护位置和幂次，每次压入或弹出会执行一次区间乘。显然并不需要逆元，模数也可以是合数。

Problem (区间 lcm)

给定一个长度为 n 的数组 a，q 次询问一个区间的最小公倍数 $\bmod 998244353$。

$1 \leqslant n, m \leqslant 2 \times 10^5, 1 \leqslant a_i \leqslant 10^7$。

Solution

我们考虑离线，从小到大枚举右端点，用线段树以左端点为下标维护区间答案。

我们可以对每个质因子开一个单调栈维护位置和幂次，每次压入或弹出会执行一次区间乘。显然并不需要逆元，模数也可以是合数。

时间复杂度 $\Theta(\sum \omega(a_i) \log n)$，其中 $\omega(n)$ 为 n 的不同质因子个数，$\max_{i=1}^{10^7} \omega(i) = 8$。

Problem（【THUPC2024 初赛】套娃）

给定一个长度为 n 的序列 a，对于 $k \in [0, n) \cap \mathbb{N}$，求 $\operatorname{mex}\left\{\operatorname{mex}_{i=l}^{l+k} a_i \middle| l \in [1, n-k] \cap \mathbb{N}\right\}$。

$1 \leqslant n \leqslant 10^5$。

Problem (【THUPC2024 初赛】套娃)

给定一个长度为 n 的序列 a，对于 $k\in[0,n)\cap\mathbb{N}$，求 $\operatorname{mex}\left\{\operatorname{mex}_{i=l}^{l+k} a_i \middle| l\in[1,n-k]\cap\mathbb{N}\right\}$。

$1\leqslant n\leqslant 10^5$。

Solution

观察区间 mex 的求解过程，区间赋值的次数是 $\Theta(n)$ 的，因此我们可以说明区间 mex 结果的二维矩阵可以用 $\Theta(n)$ 个值相同的矩形表示。

Problem (【THUPC2024 初赛】套娃)

给定一个长度为 n 的序列 a，对于 $k \in [0, n) \cap \mathbb{N}$，求 $\operatorname{mex}\left\{\operatorname{mex}_{i=l}^{l+k} a_i \middle| l \in [1, n-k] \cap \mathbb{N}\right\}$。

$1 \leqslant n \leqslant 10^5$。

Solution

观察区间 mex 的求解过程，区间赋值的次数是 $\Theta(n)$ 的，因此我们可以说明区间 mex 结果的二维矩阵可以用 $\Theta(n)$ 个值相同的矩形表示。

从小到大枚举 k，一个矩形中的值会被插入一次至多被删除一次，我们只需通过维护值域维护带插入删除的全局 mex 即可。

Problem（【THUPC2024 初赛】套娃）

给定一个长度为 n 的序列 a，对于 $k \in [0, n) \cap \mathbb{N}$，求 $\operatorname{mex}\left\{\operatorname{mex}_{i=l}^{l+k} a_i \middle| l \in [1, n-k] \cap \mathbb{N}\right\}$。

$1 \leqslant n \leqslant 10^5$。

Solution

观察区间 mex 的求解过程，区间赋值的次数是 $\Theta(n)$ 的，因此我们可以说明区间 mex 结果的二维矩阵可以用 $\Theta(n)$ 个值相同的矩形表示。

从小到大枚举 k，一个矩形中的值会被插入一次至多被删除一次，我们只需通过维护值域维护带插入删除的全局 mex 即可。

时间复杂度 $\Theta(n \log n)$。

Problem (连续段计数 / Pudding Monsters)

给定一个排列 p，求其连续段数量。

对于一个排列，我们定义其区间 $[l, r]$ 为连续段当且仅当 $\nexists a \notin [l, r], b, c \in [l, r], p_b < p_a < p_c$。

$1 \leqslant n \leqslant 3 \times 10^5$。

Problem (连续段计数 / Pudding Monsters)

给定一个排列 p，求其连续段数量。

对于一个排列，我们定义其区间 $[l, r]$ 为连续段当且仅当 $\nexists a \notin [l, r], b, c \in [l, r], p_b < p_a < p_c$。

$1 \leqslant n \leqslant 3 \times 10^5$。

Solution

从小到大枚举右端点，用线段树以左端点为下标维护区间是否为连续段。

Solution

一个区间为排列的连续段当且仅当最大值减最小值加一等于区间长度（显然不可能小于），我们用线段树维护前者减去后者的区间最小值及个数，最大值与最小值的变化可以用单调栈拆成 $\Theta(n)$ 次区间加。

Solution

一个区间为排列的连续段当且仅当最大值减最小值加一等于区间长度（显然不可能小于），我们用线段树维护前者减去后者的区间最小值及个数，最大值与最小值的变化可以用单调栈拆成 $\Theta(n)$ 次区间加。

我们也可以维护区间长度减去区间内绝对值差为 1 的对数。

Solution

一个区间为排列的连续段当且仅当最大值减最小值加一等于区间长度（显然不可能小于），我们用线段树维护前者减去后者的区间最小值及个数，最大值与最小值的变化可以用单调栈拆成 $\Theta(n)$ 次区间加。

我们也可以维护区间长度减去区间内绝对值差为 1 的对数。

时间复杂度 $\Theta(n\log n)$。

Solution

一个区间为排列的连续段当且仅当最大值减最小值加一等于区间长度（显然不可能小于），我们用线段树维护前者减去后者的区间最小值及个数，最大值与最小值的变化可以用单调栈拆成 $\Theta(n)$ 次区间加。

我们也可以维护区间长度减去区间内绝对值差为 1 的对数。

时间复杂度 $\Theta(n \log n)$。

连续段有着一些优良性质，这个问题可以用析合树做到 $\Theta(n)$。

Problem (【IOI2018】排座位)

略。

Problem（【IOI2018】排座位）

略。

Solution

同样维护每个值域前缀的出现次数为 1 或 3 的 2×2 子矩形个数。

Problem（【IOI2018】排座位）

略。

Solution

同样维护每个值域前缀的出现次数为 1 或 3 的 2×2 子矩形个数。

预处理时间复杂度 $\Theta(HW)$，单次询问时间复杂度 $\Theta(\log H + \log W)$。

Problem (Sasha and Algorithm of Silence's Sounds)

略。

Problem (Sasha and Algorithm of Silence's Sounds)

略。

Solution

枚举值域区间右端点，可以用 LCT 配合双指针求出没有环的最小左端点。

Problem (Sasha and Algorithm of Silence's Sounds)

略。

Solution

枚举值域区间右端点，可以用 LCT 配合双指针求出没有环的最小左端点。

用线段树维护点数减边数的最小值及出现次数，区间查询最小值为 1 的最小值个数和即可。

Problem (Sasha and Algorithm of Silence's Sounds)

略。

Solution

枚举值域区间右端点，可以用 LCT 配合双指针求出没有环的最小左端点。

用线段树维护点数减边数的最小值及出现次数，区间查询最小值为 1 的最小值个数和即可。

时间复杂度 $\Theta(nm(\log n + \log m))$。

Problem（【UNR #1】奇怪的线段树）

给定一棵 n 个叶子结点的分界点任意独立给定的广义线段树，给定一个结点的集合，求至少多少区间定位的结点集的到根链并为给定集合。

$1 \leqslant n \leqslant 4000$。

Problem (【UNR #1】奇怪的线段树)

给定一棵 n 个叶子结点的分界点任意独立给定的广义线段树，给定一个结点的集合，求至少多少区间定位的结点集的到根链并为给定集合。

$1 \leqslant n \leqslant 4000$。

Solution

显然对于有解的情况，一个集合中的结点的父亲结点也在集合中。我们可以将问题转化为求至少多少区间定位的结点集的并集满足其包含了在给定集合中且没有儿子结点在给定集合中的点且包含于给定集合。

Problem（【UNR #1】奇怪的线段树）

给定一棵 n 个叶子结点的分界点任意独立给定的广义线段树，给定一个结点的集合，求至少多少区间定位的结点集的到根链并为给定集合。

$1 \leqslant n \leqslant 4000$。

Solution

显然对于有解的情况，一个集合中的结点的父亲结点也在集合中。我们可以将问题转化为求至少多少区间定位的结点集的并集满足其包含了在给定集合中且没有儿子结点在给定集合中的点且包含于给定集合。

我们以给定集合中的结点为结点重新建立一个图，将对应区间为 $[l, r]$ 的右儿子结点连向所有对应区间左端点为 $r + 1$ 的结点，将对应区间为 $[l, r]$ 的左儿子结点连向所有对应区间左端点为 $r + 1$ 的左儿子结点，包含于给定集合的一个区间定位的结点集即新图上的一条链。

Solution

类似最小链覆盖，我们做传递闭包后将集合中没有儿子结点在集合中的结点取出来做 DAG 的最小路径覆盖即可。

Solution

类似最小链覆盖，我们做传递闭包后将集合中没有儿子结点在集合中的结点取出来做 DAG 的最小路径覆盖即可。

对每个给定集合中的结点 i，设其对应区间为 $[l_i, r_i]$，建立两个结点 u_i, v_i，并对每个位置 i 建立辅助点 p_i, q_i，对于每个儿子结点均不在集合中的集合中结点，从源点连向 u_i，从 v_i 连向汇点，边权为 1，对于每个集合中的右儿子结点，从 u_i 连向 p_{r_i+1}，从 p_{l_i} 连向 u_i 与 v_i，边权为 $+\infty$，对于每个集合中的左儿子结点，从 u_i 连向满足 $l_j = r_i + 1$ 的所有 u_j 和 v_j，从 p_{l_i} 连向 u_i 和 v_i，边权为 $+\infty$。点数、边数均为 $\Theta(n)$。

Solution

类似最小链覆盖，我们做传递闭包后将集合中没有儿子结点在集合中的结点取出来做 DAG 的最小路径覆盖即可。

对每个给定集合中的结点 i，设其对应区间为 $[l_i, r_i]$，建立两个结点 u_i, v_i，并对每个位置 i 建立辅助点 p_i, q_i，对于每个儿子结点均不在集合中的集合中结点，从源点连向 u_i，从 v_i 连向汇点，边权为 1，对于每个集合中的右儿子结点，从 u_i 连向 p_{r_i+1}，从 p_{l_i} 连向 u_i 与 v_i，边权为 $+\infty$，对于每个集合中的左儿子结点，从 u_i 连向满足 $l_j = r_i + 1$ 的所有 u_j 和 v_j，从 p_{l_i} 连向 u_i 和 v_i，边权为 $+\infty$。点数、边数均为 $\Theta(n)$。

时间复杂度 $O(n^2)$，我猜实际复杂度与二分图匹配类似，大家如果有兴趣可以自行分析。

Problem（【ZJOI2017】线段树）

给定一棵 n 个叶子结点的分界点任意独立给定的广义线段树，q 次询问：给定一个区间 $[l,r]$ 与一个结点 u，求 $[l,r]$ 定位的结点集与 u 的距离之和。

$2 \leqslant n \leqslant 2 \times 10^5, 1 \leqslant q \leqslant 2 \times 10^5$。

Problem（【ZJOI2017】线段树）

给定一棵 n 个叶子结点的分界点任意独立给定的广义线段树，q 次询问：给定一个区间 $[l,r]$ 与一个结点 u，求 $[l,r]$ 定位的结点集与 u 的距离之和。

$2 \leqslant n \leqslant 2 \times 10^5, 1 \leqslant q \leqslant 2 \times 10^5$。

Solution

注意到一个区间 $[l,r]$ 定位的结点集为 l 和 r 对应的叶子结点的最近公共祖先或以 l 和 r 对应的叶子结点为端点的链上结点的儿子结点集合的子集。

Problem (【ZJOI2017】线段树)

给定一棵 n 个叶子结点的分界点任意独立给定的广义线段树，q 次询问：给定一个区间 $[l,r]$ 与一个结点 u，求 $[l,r]$ 定位的结点集与 u 的距离之和。

$2 \leqslant n \leqslant 2 \times 10^5, 1 \leqslant q \leqslant 2 \times 10^5$。

Solution

注意到一个区间 $[l,r]$ 定位的结点集为 l 和 r 对应的叶子结点的最近公共祖先或以 l 和 r 对应的叶子结点为端点的链上结点的儿子结点集合的子集。

只需求出 u 与 l 和 r 对应的叶子结点的最近公共祖先简单讨论即可。

Problem（【ZJOI2017】线段树）

给定一棵 n 个叶子结点的分界点任意独立给定的广义线段树，q 次询问：给定一个区间 $[l,r]$ 与一个结点 u，求 $[l,r]$ 定位的结点集与 u 的距离之和。

$2 \leqslant n \leqslant 2 \times 10^5, 1 \leqslant q \leqslant 2 \times 10^5$。

Solution

注意到一个区间 $[l,r]$ 定位的结点集为 l 和 r 对应的叶子结点的最近公共祖先或以 l 和 r 对应的叶子结点为端点的链上结点的儿子结点集合的子集。

只需求出 u 与 l 和 r 对应的叶子结点的最近公共祖先简单讨论即可。

时间复杂度为 n 个结点 q 次询问最近公共祖先的时间复杂度。

Problem（【2017 集训队互测】被操纵的线段树）

给定一棵 n 个叶子结点的分界点任意独立给定的广义线段树，q 次操作：

1. 给定 $[l, r] \subseteq [1, n]$，求 $[l, r] \cap \mathbb{N}$ 的定位结点集大小。
2. 给定一个结点与旋转方式，对它进行与 Splay 单旋类似的左旋或右旋。

强制在线，$1 \leqslant n, q \leqslant 2 \times 10^5$，空间限制 32 MiB。

Problem（【2017 集训队互测】被操纵的线段树）

给定一棵 n 个叶子结点的分界点任意独立给定的广义线段树，q 次操作：

1. 给定 $[l,r] \subseteq [1,n]$，求 $[l,r] \cap \mathbb{N}$ 的定位结点集大小。
2. 给定一个结点与旋转方式，对它进行与 Splay 单旋类似的左旋或右旋。

强制在线，$1 \leqslant n, q \leqslant 2 \times 10^5$，空间限制 32 MiB。

Solution

用动态树维护类似【UNR #1】奇怪的线段树的结构，略。

Problem（【THUPC2021 初赛】线段树）

略。

Problem（【NOI2016】区间）

给定数轴上 n 个区间，你需要从中挑出 m 个，使得它们至少包含一个共同点，并且这 m 个区间的最大长度与最小长度尽可能接近。

$1 \leqslant m \leqslant n \leqslant 5 \times 10^5$，$0 \leqslant l_i \leqslant r_i \leqslant 10^9$。

Problem（【NOI2016】区间）

给定数轴上 n 个区间，你需要从中挑出 m 个，使得它们至少包含一个共同点，并且这 m 个区间的最大长度与最小长度尽可能接近。

$1 \leqslant m \leqslant n \leqslant 5 \times 10^5$，$0 \leqslant l_i \leqslant r_i \leqslant 10^9$。

Solution

如果选出的区间包含至少一个公共点，那么一定存在一个公共点作为一个区间的端点。

Problem（【NOI2016】区间）

给定数轴上 n 个区间，你需要从中挑出 m 个，使得它们至少包含一个共同点，并且这 m 个区间的最大长度与最小长度尽可能接近。

$1 \leqslant m \leqslant n \leqslant 5 \times 10^5$，$0 \leqslant l_i \leqslant r_i \leqslant 10^9$。

Solution

如果选出的区间包含至少一个公共点，那么一定存在一个公共点作为一个区间的端点。

将所有区间按照长度排序后双指针，用线段树维护当前每个区间端点被覆盖了几次，将区间端点按位置从小到大排列，相当于区间加减维护最大值。

Problem（【NOI2016】区间）

给定数轴上 n 个区间，你需要从中挑出 m 个，使得它们至少包含一个共同点，并且这 m 个区间的最大长度与最小长度尽可能接近。

$1 \leqslant m \leqslant n \leqslant 5 \times 10^5$，$0 \leqslant l_i \leqslant r_i \leqslant 10^9$。

Solution

如果选出的区间包含至少一个公共点，那么一定存在一个公共点作为一个区间的端点。

将所有区间按照长度排序后双指针，用线段树维护当前每个区间端点被覆盖了几次，将区间端点按位置从小到大排列，相当于区间加减维护最大值。

时间复杂度 $\Theta(n \log n)$。

Problem (Snuke's Coloring 2)

有一个矩形 $\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant W, 0\leqslant y\leqslant H\}$，给定 n 个点 (x_i,y_i)，对于每个点你要将这个矩形对 $\{(x,y)|x\geqslant x_i\},\{(x,y)|x\leqslant x_i\}$, $\{(x,y)|y\geqslant y_i\},\{(x,y)|y\leqslant y_i\}$ 四个半平面之一求交，求最终的矩形的周长最大值。

$1\leqslant W,H\leqslant 10^8, 1\leqslant n\leqslant 3\times 10^5$。

Problem (Snuke's Coloring 2)

有一个矩形 $\{(x,y)|0 \leqslant x \leqslant W, 0 \leqslant y \leqslant H\}$，给定 n 个点 (x_i, y_i)，对于每个点你要将这个矩形对 $\{(x,y)|x \geqslant x_i\}, \{(x,y)|x \leqslant x_i\}$, $\{(x,y)|y \geqslant y_i\}, \{(x,y)|y \leqslant y_i\}$ 四个半平面之一求交，求最终的矩形的周长最大值。

$1 \leqslant W, H \leqslant 10^8, 1 \leqslant n \leqslant 3 \times 10^5$。

Solution

我们可以很容易地构造性证明答案 $\geqslant 2\max(W, H) + 2$。

Problem (Snuke's Coloring 2)

有一个矩形 $\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant W, 0\leqslant y\leqslant H\}$，给定 n 个点 (x_i,y_i)，对于每个点你要将这个矩形对 $\{(x,y)|x\geqslant x_i\},\{(x,y)|x\leqslant x_i\}$, $\{(x,y)|y\geqslant y_i\},\{(x,y)|y\leqslant y_i\}$ 四个半平面之一求交，求最终的矩形的周长最大值。

$1\leqslant W,H\leqslant 10^8, 1\leqslant n\leqslant 3\times 10^5$。

Solution

我们可以很容易地构造性证明答案 $\geqslant 2\max(W,H)+2$。

因此最终的矩形 $\{(x,y)|l_x\leqslant x\leqslant r_x, l_y\leqslant y\leqslant r_y\}$ 一定满足 $l_x<\frac{W}{2}<r_x$ 或 $l_y<\frac{H}{2}<r_y$。我们下面不妨以 $l_y<\frac{H}{2}<r_y$ 的情况为例。

Solution

我们将点按 x_i 排序，相当于我们要选择一个区间 $[l, r]$，对于 $i < l$ 我们选择 $x \geqslant x_i$，对于 $i > r$ 我们选择 $x \leqslant x_i$，对于 $i \in [l, r]$ 我们选择包含 $y = \frac{H}{2}$ 的那一个。

Solution

我们将点按 x_i 排序，相当于我们要选择一个区间 $[l, r]$，对于 $i < l$ 我们选择 $x \geqslant x_i$，对于 $i > r$ 我们选择 $x \leqslant x_i$，对于 $i \in [l, r]$ 我们选择包含 $y = \frac{H}{2}$ 的那一个。

我们从左到右枚举 r，用线段树对每个离散化后的 l 维护 $r_y - l_y$ 的值，类似区间 lcm 建立两个单调栈即可。

Solution

我们将点按 x_i 排序，相当于我们要选择一个区间 $[l,r]$，对于 $i<l$ 我们选择 $x \geqslant x_i$，对于 $i>r$ 我们选择 $x \leqslant x_i$，对于 $i \in [l,r]$ 我们选择包含 $y=\frac{H}{2}$ 的那一个。

我们从左到右枚举 r，用线段树对每个离散化后的 l 维护 r_y-l_y 的值，类似区间 lcm 建立两个单调栈即可。

时间复杂度 $\Theta(n\log n)$。

Problem (SOJ719 折纸)

给定一个长度为 n 的数组 v，q 次询问：给定 l_i, r_i，求 $\max\{v_a + v_b + v_c | l_i \leqslant a < b < c \leqslant r_i, b - a \leqslant c - b\}$。

$3 \leqslant n \leqslant 5 \times 10^6, 1 \leqslant v_i \leqslant 10^9, 1 \leqslant l_i < l_i + 2 \leqslant r_i \leqslant n$。

Problem (SOJ719 折纸)

给定一个长度为 n 的数组 v，q 次询问：给定 l_i, r_i，求 $\max\{v_a + v_b + v_c | l_i \leqslant a < b < c \leqslant r_i, b - a \leqslant c - b\}$。

$3 \leqslant n \leqslant 5 \times 10^6, 1 \leqslant v_i \leqslant 10^9, 1 \leqslant l_i < l_i + 2 \leqslant r_i \leqslant n$。

Solution

我们考察最终的 (a, b, c)，显然若 $\exists a < i < b, v_i \geqslant v_a$ 则我们可以将 a 调整为 i，若 $\exists a < i < b, v_i \geqslant v_b$，则我们可以将 b 调整为 i，注意到调整构成偏序，因此我们可以只统计满足 $\forall i \in (a, b) \cap \mathbb{N}, v_i < \min(v_a, v_b)$ 的 (a, b, c)。

Solution

注意到满足条件的 (a, b) 只有 $\Theta(n)$ 种，可以用单调栈求出。

Solution

注意到满足条件的 (a, b) 只有 $\Theta(n)$ 种，可以用单调栈求出。
我们从大到小枚举左端点 l，用线段树维护 $c = j$ 的最大答案 f_j。

Solution

注意到满足条件的 (a,b) 只有 $\Theta(n)$ 种，可以用单调栈求出。

我们从大到小枚举左端点 l，用线段树维护 $c=j$ 的最大答案 f_j。

将左端点从 $i+1$ 移动到 i 时，枚举 $a=i$ 的 (a,b)，将线段树满足 $j \geqslant 2b-a$ 的 f_j 对 $v_j+(v_a+v_b)$ 取最大值即可。

Solution

注意到满足条件的 (a,b) 只有 $\Theta(n)$ 种，可以用单调栈求出。

我们从大到小枚举左端点 l，用线段树维护 $c=j$ 的最大答案 f_j。

将左端点从 $i+1$ 移动到 i 时，枚举 $a=i$ 的 (a,b)，将线段树满足 $j \geqslant 2b-a$ 的 f_j 对 $v_j+(v_a+v_b)$ 取最大值即可。

对线段树每个结点维护对应区间 v_j 与 f_j 的最大值，操作易于通过懒标记维护。

Solution

注意到满足条件的 (a,b) 只有 $\Theta(n)$ 种，可以用单调栈求出。

我们从大到小枚举左端点 l，用线段树维护 $c=j$ 的最大答案 f_j。

将左端点从 $i+1$ 移动到 i 时，枚举 $a=i$ 的 (a,b)，将线段树满足 $j \geqslant 2b-a$ 的 f_j 对 $v_j+(v_a+v_b)$ 取最大值即可。

对线段树每个结点维护对应区间 v_j 与 f_j 的最大值，操作易于通过懒标记维护。

时间复杂度 $\Theta((n+q)\log n)$。

Problem（【统一省选 2020】冰火战士）

略。

Problem（【集训队互测 2015】上帝之手）

略。

Problem (【SDOI2016】游戏)

略。

Problem (【UR #11】元旦老人与数列)

略。

Problem (Picks loves segment tree VIII)

略。

Problem（【雅礼集训 2017】市场)

略。

Problem (【雅礼集训 2017】市场)

略。

Solution

与区间加区间开平方根下取整类似，略。

Problem (BZOJ5312 冒险)

略。

Problem (【PKUSC2021】逛街)

给定一个长度为 n 的数列 a，q 次操作：

1. 给定 $[l,r] \subseteq [1,n)$，i 从小到大枚举 $[l,r] \cap \mathbb{N}$ 中的元素，执行 $a_i \leftarrow \max(a_i, a_{i+1})$。
2. 给定 $[l,r] \cap \mathbb{N}$，令 $P(l,r) = \{\max\{a_j | j \in [l,i] \cap \mathbb{N}\} | i \in [l,r] \cap \mathbb{N}\}$ 为不可重的集合，求 $\sum_{x \in P(l,r)} x$。

$2 \leqslant n, q \leqslant 3 \times 10^5$。

Problem (【PKUSC2021】逛街)

给定一个长度为 n 的数列 a，q 次操作：

1. 给定 $[l,r] \subseteq [1,n]$，i 从小到大枚举 $[l,r] \cap \mathbb{N}$ 中的元素，执行 $a_i \leftarrow \max(a_i, a_{i+1})$。
2. 给定 $[l,r] \cap \mathbb{N}$，令 $P(l,r) = \{\max\{a_j | j \in [l,i] \cap \mathbb{N}\} | i \in [l,r] \cap \mathbb{N}\}$ 为不可重的集合，求 $\sum_{x \in P(l,r)} x$。

$2 \leqslant n, q \leqslant 3 \times 10^5$。

Solution

注意到如果我们能在可接受的复杂度内求出第一个元素，我们可以删除满足与前一个元素相同的所有元素（其它元素位置不变）。

Solution

考察一次修改对序列产生的影响。

Solution

考察一次修改对序列产生的影响。

对于 $i \in [l, r] \cap \mathbb{N}$，若 $a_{i+1} > a_i$，则将 a_{i+1} 的位置减一，否则将 a_{i+1} 删除。

Solution

考察一次修改对序列产生的影响。

对于 $i \in [l, r] \cap \mathbb{N}$，若 $a_{i+1} > a_i$，则将 a_{i+1} 的位置减一，否则将 a_{i+1} 删除。

我们考虑用线段树维护每个初始元素的当前位置，对每个结点维护其对应区间初始元素在当前的位置最大最小值、对应区间内是否有逆序对与查询所需的李超树信息。

Solution

考察一次修改对序列产生的影响。

对于 $i \in [l, r] \cap \mathbb{N}$，若 $a_{i+1} > a_i$，则将 a_{i+1} 的位置减一，否则将 a_{i+1} 删除。

我们考虑用线段树维护每个初始元素的当前位置，对每个结点维护其对应区间初始元素在当前的位置最大最小值、对应区间内是否有逆序对与查询所需的李超树信息。

查询时直接使用维护的当前位置信息进行定位即可，后续与李超树中介绍的方法一致。

Solution

考察一次修改对序列产生的影响。

对于 $i \in [l, r] \cap \mathbb{N}$，若 $a_{i+1} > a_i$，则将 a_{i+1} 的位置减一，否则将 a_{i+1} 删除。

我们考虑用线段树维护每个初始元素的当前位置，对每个结点维护其对应区间初始元素在当前的位置最大最小值、对应区间内是否有逆序对与查询所需的李超树信息。

查询时直接使用维护的当前位置信息进行定位即可，后续与李超树中介绍的方法一致。

注意到每个元素最多被删除一次，时间复杂度 $O((n+q)\log^2 n)$。

Problem（【NOI2012】魔幻棋盘）

给定一个 $n \times m$ 的矩阵 a 与其中一个坐标 (X, Y)，共 q 次操作：将一个矩形加上 c_i，查询一个包含 (X, Y) 的矩形中数的最大公约数。

$1 \leqslant n, m, nm \leqslant 5 \times 10^5, 1 \leqslant q \leqslant 10^5$，保证任意时刻矩阵中任意一个数为不超过 $2^{62} - 1$ 的正整数。

Problem (【NOI2012】魔幻棋盘)

给定一个 $n \times m$ 的矩阵 a 与其中一个坐标 (X, Y)，共 q 次操作：将一个矩形加上 c_i，查询一个包含 (X, Y) 的矩形中数的最大公约数。

$1 \leqslant n, m, nm \leqslant 5 \times 10^5, 1 \leqslant q \leqslant 10^5$，保证任意时刻矩阵中任意一个数为不超过 $2^{62} - 1$ 的正整数。

Solution

显然可以通过关于 (X, Y) 分成四块转化为 $(X, Y) = (1, 1)$ 的问题。

Problem（【NOI2012】魔幻棋盘）

给定一个 $n \times m$ 的矩阵 a 与其中一个坐标 (X, Y)，共 q 次操作：将一个矩形加上 c_i，查询一个包含 (X, Y) 的矩形中数的最大公约数。

$1 \leqslant n, m, nm \leqslant 5 \times 10^5, 1 \leqslant q \leqslant 10^5$，保证任意时刻矩阵中任意一个数为不超过 $2^{62} - 1$ 的正整数。

Solution

显然可以通过关于 (X, Y) 分成四块转化为 $(X, Y) = (1, 1)$ 的问题。

我们令 $b_{i,j} = a_{i,j} - a_{i-1,j} - a_{i,j-1} + a_{i-1,j-1}$，显然 a 的二维前缀 gcd 与 b 的二维前缀 gcd 相同。

Solution

用二维线段树维护单点修改，矩阵 gcd 即可。我们显然在实现过程中可以将关于 (X, Y) 分出的四块用同一棵二维线段树维护，即 b 采用原先的四块不同的定义但放在同一棵树维护。由于一开始给定了矩阵的每个元素，实际并不需要动态开点。

Solution

用二维线段树维护单点修改，矩阵 gcd 即可。我们显然在实现过程中可以将关于 (X, Y) 分出的四块用同一棵二维线段树维护，即 b 采用原先的四块不同的定义但放在同一棵树维护。由于一开始给定了矩阵的每个元素，实际并不需要动态开点。

时间复杂度 $\Theta(nm + q\log n\log m)$。

Problem (【CQOI2011】动态逆序对)

略。

Problem (陌上花开)

有 n 个三维点，称一个点的权值为每一维均不超过它的点的数量。求每种权值的点的数量。

$1 \leqslant n \leqslant 10^5$。

Problem (陌上花开)

有 n 个三维点，称一个点的权值为每一维均不超过它的点的数量。求每种权值的点的数量。

$1 \leqslant n \leqslant 10^5$。

Solution

注意到离线 k 维数点可以转化为离线带修 $k-1$ 维数点，我们对每个点求出其权值即可。

Problem (陌上花开)

有 n 个三维点，称一个点的权值为每一维均不超过它的点的数量。求每种权值的点的数量。

$1 \leqslant n \leqslant 10^5$。

Solution

注意到离线 k 维数点可以转化为离线带修 $k-1$ 维数点，我们对每个点求出其权值即可。

时间复杂度 $\Theta(q \log^2 q)$。

Problem (The Classic Problem)

给定一个 n 个点 m 条边的无向图，对于 $i \in [1, m] \cap \mathbb{N}$，边 (u_i, v_i) 的边权为 2^{x_i}，求 s 到 t 的最短路长度对 $10^9 + 7$ 取模的结果。

$0 \leqslant n, m, x_i \leqslant 10^5, 1 \leqslant s, t \leqslant n$。

Problem (The Classic Problem)

给定一个 n 个点 m 条边的无向图，对于 $i \in [1, m] \cap \mathbb{N}$，边 (u_i, v_i) 的边权为 2^{x_i}，求 s 到 t 的最短路长度对 $10^9 + 7$ 取模的结果。

$0 \leqslant n, m, x_i \leqslant 10^5, 1 \leqslant s, t \leqslant n$。

Solution

略。

Problem (静态链上第 k 大)

给定一棵 n 个结点的树，每个点有点权，q 次询问某条链的第 k 大的点权。要求时间复杂度 $O((n+q)\log n)$。

Problem (静态链上第 k 大)

给定一棵 n 个结点的树，每个点有点权，q 次询问某条链的第 k 大的点权。要求时间复杂度 $O((n+q)\log n)$。

Solution

我们可以离散化后用可持久化线段树处理出每条到根链的权值线段树，然后询问的链 $\mathrm{path}(u,v)$ 的权值线段树可以用 u，v，$\mathrm{lca}(u,v)$ 和 $\mathrm{par}(\mathrm{lca}(u,v))$ 四个点的到根链的权值线段树的和差表示。类似静态区间第 k 大进行线段树上二分即可。

Problem (【CQOI2015】任务查询系统)

略。

Problem（【FJOI2016】神秘数）

给定长度为 n 的正整数序列 a，q 次询问给定 $[l,r] \subseteq [1,n]$ 求 $\operatorname{mex}\{\sum_{i\in S} a_i | S \subseteq [l,r] \cap \mathbb{N}\}$。

$1 \leqslant n, q \leqslant 10^5, \sum_{i=1}^{n} a_i \leqslant V = 10^9$。

Problem (【FJOI2016】神秘数)

给定长度为 n 的正整数序列 a，q 次询问给定 $[l,r] \subseteq [1,n]$ 求 $\operatorname{mex}\{\sum_{i\in S} a_i | S \subseteq [l,r] \cap \mathbb{N}\}$。

$1 \leqslant n, q \leqslant 10^5, \sum_{i=1}^{n} a_i \leqslant V = 10^9$。

Solution

假设我们已知 $[0,p] \cap \mathbb{N}$ 中的数可以用给定区间中数的和表示，令 s 为给定区间中 $\leqslant p+1$ 的数之和，可以说明 $[0,s] \cap \mathbb{N}$ 中的数也一定可以用给定区间中数的和表示，若 $s = p$，则 $p+1$ 无法被表示。

Problem（【FJOI2016】神秘数）

给定长度为 n 的正整数序列 a，q 次询问给定 $[l,r] \subseteq [1,n]$ 求 $\operatorname{mex}\{\sum_{i\in S} a_i | S \subseteq [l,r] \cap \mathbb{N}\}$。

$1 \leqslant n, q \leqslant 10^5, \sum_{i=1}^{n} a_i \leqslant V = 10^9$。

Solution

假设我们已知 $[0,p] \cap \mathbb{N}$ 中的数可以用给定区间中数的和表示，令 s 为给定区间中 $\leqslant p+1$ 的数之和，可以说明 $[0,s] \cap \mathbb{N}$ 中的数也一定可以用给定区间中数的和表示，若 $s = p$，则 $p+1$ 无法被表示。

我们考虑以下迭代过程：初始时 $f_0 = 0$，i 从 0 开始按自然数序枚举，令 f_{i+1} 为给定区间内 $\leqslant f_i + 1$ 的数之和，若 $f_{i+1} = f_i$ 则结束迭代得到答案为 $f_i + 1$。

Solution

注意到对于 $i \in \mathbb{N}$，若迭代次数不低于 $i+2$，则 $f_{i+2} - f_{i+1} \geqslant f_i + 2$，由答案不超过 V 得迭代次数为 $O(\log V)$。

Solution

注意到对于 $i \in \mathbb{N}$，若迭代次数不低于 $i+2$，则 $f_{i+2} - f_{i+1} \geqslant f_i + 2$，由答案不超过 V 得迭代次数为 $O(\log V)$。

我们可以用可持久化线段树预处理出每个前缀的权值线段树并在上面维护值域前缀和。

Solution

注意到对于 $i \in \mathbb{N}$，若迭代次数不低于 $i+2$，则 $f_{i+2} - f_{i+1} \geqslant f_i + 2$，由答案不超过 V 得迭代次数为 $O(\log V)$。

我们可以用可持久化线段树预处理出每个前缀的权值线段树并在上面维护值域前缀和。

时间复杂度 $\Theta((n + q\log V)\log n)$。

Problem (hihoCoder 挑战赛 13 树堆)

我们称一棵树为树堆当且仅当树上每个点的点权均不小于子树内任意点的点权。给定一棵 n 个结点的有根树，每次操作可以删除一个点并将其所有儿子结点的父亲修改为其父亲，对于每个点求经过若干操作使得其子树变为树堆后该子树的最大结点数。

$1 \leqslant n \leqslant 10^5$。

Problem (hihoCoder 挑战赛 13 树堆)

我们称一棵树为树堆当且仅当树上每个点的点权均不小于子树内任意点的点权。给定一棵 n 个结点的有根树，每次操作可以删除一个点并将其所有儿子结点的父亲修改为其父亲，对于每个点求经过若干操作使得其子树变为树堆后该子树的最大结点数。

$1 \leqslant n \leqslant 10^5$。

Solution

显然点权可以离散化为不超过 n 的正整数。对于每一个结点，用线段树对每个点权 x 维护若该子树以一个点权为 x 的结点为父亲能保留结点数量的最大值。

Solution

对每个结点，我们先将其所有儿子结点的线段树合并，该结点的答案即点权对应位置的值加一，并将线段树不小于点权的位置对求出的答案取最大值，注意到显然线段树维护的值关于位置单调不降，可以转化为左端点为点权，右端点在递归的过程中类似线段树二分判断的区间加一。

Solution

对每个结点，我们先将其所有儿子结点的线段树合并，该结点的答案即点权对应位置的值加一，并将线段树不小于点权的位置对求出的答案取最大值，注意到显然线段树维护的值关于位置单调不降，可以转化为左端点为点权，右端点在递归的过程中类似线段树二分判断的区间加一。

时间复杂度 $\Theta(n\log n)$。

Problem (【PKUWC2018】Minimax)

有一棵二叉树，给定叶子结点的权值，其它结点的权值有 p 的概率是它两个儿子权值的较小值，$1-p$ 的概率是较大值。求根结点权值是每一种值的概率。

$1 \leqslant n \leqslant 3 \times 10^5$。

Problem (【PKUWC2018】Minimax)

有一棵二叉树，给定叶子结点的权值，其它结点的权值有 p 的概率是它两个儿子权值的较小值，$1-p$ 的概率是较大值。求根结点权值是每一种值的概率。

$1 \leqslant n \leqslant 3 \times 10^5$。

Solution

对每个节点用线段树对每一种值维护其概率及区间和。

Problem (【PKUWC2018】Minimax)

有一棵二叉树，给定叶子结点的权值，其它结点的权值有 p 的概率是它两个儿子权值的较小值，$1-p$ 的概率是较大值。求根结点权值是每一种值的概率。

$1 \leqslant n \leqslant 3 \times 10^5$。

Solution

对每个节点用线段树对每一种值维护其概率及区间和。

合并时，额外传入当前子树外的前后缀和，如果其中一个结点为空结点则直接使用懒标记完成合并。

Problem (【PKUWC2018】Minimax)

有一棵二叉树，给定叶子结点的权值，其它结点的权值有 p 的概率是它两个儿子权值的较小值，$1-p$ 的概率是较大值。求根结点权值是每一种值的概率。

$1 \leqslant n \leqslant 3 \times 10^5$。

Solution

对每个节点用线段树对每一种值维护其概率及区间和。

合并时，额外传入当前子树外的前后缀和，如果其中一个结点为空结点则直接使用懒标记完成合并。

时间复杂度 $\Theta(n \log n)$。

Problem (Peaks)

给定一张 n 个点 m 条边的无向图，每个点有点权 h_i，每条边有边权 c_i。q 次询问给定 v, x, k，求从点 v 出发只经过 $c_i \leqslant x$ 的边，能到达的点的点权第 k 大。

$1 \leqslant n \leqslant 10^5, 0 \leqslant m, q \leqslant 5 \times 10^5$。

Problem (Peaks)

给定一张 n 个点 m 条边的无向图，每个点有点权 h_i，每条边有边权 c_i。q 次询问给定 v, x, k，求从点 v 出发只经过 $c_i \leqslant x$ 的边，能到达的点的点权第 k 大。

$1 \leqslant n \leqslant 10^5, 0 \leqslant m, q \leqslant 5 \times 10^5$。

Solution

相当于求 Kruskal 重构树的子树第 k 大，子树可以通过给定一个叶子结点和一个值 x 给出，为其点权 $\leqslant x$ 的最远祖先。

Problem (Peaks)

给定一张 n 个点 m 条边的无向图，每个点有点权 h_i，每条边有边权 c_i。q 次询问给定 v, x, k，求从点 v 出发只经过 $c_i \leqslant x$ 的边，能到达的点的点权第 k 大。

$1 \leqslant n \leqslant 10^5, 0 \leqslant m, q \leqslant 5 \times 10^5$。

Solution

相当于求 Kruskal 重构树的子树第 k 大，子树可以通过给定一个叶子结点和一个值 x 给出，为其点权 $\leqslant x$ 的最远祖先。

离线可以通过 Kruskal 算法直接转化为【HNOI2012】永无乡。

Problem (Peaks)

给定一张 n 个点 m 条边的无向图，每个点有点权 h_i，每条边有边权 c_i。q 次询问给定 v, x, k，求从点 v 出发只经过 $c_i \leqslant x$ 的边，能到达的点的点权第 k 大。

$1 \leqslant n \leqslant 10^5, 0 \leqslant m, q \leqslant 5 \times 10^5$。

Solution

相当于求 Kruskal 重构树的子树第 k 大，子树可以通过给定一个叶子结点和一个值 x 给出，为其点权 $\leqslant x$ 的最远祖先。

离线可以通过 Kruskal 算法直接转化为【HNOI2012】永无乡。

在线改为用可持久化线段树合并，每次先找到子树的根结点再直接在其可持久化线段树上查询即可。

Problem (Peaks)

给定一张 n 个点 m 条边的无向图，每个点有点权 h_i，每条边有边权 c_i。q 次询问给定 v, x, k，求从点 v 出发只经过 $c_i \leqslant x$ 的边，能到达的点的点权第 k 大。

$1 \leqslant n \leqslant 10^5, 0 \leqslant m, q \leqslant 5 \times 10^5$。

Solution

相当于求 Kruskal 重构树的子树第 k 大，子树可以通过给定一个叶子结点和一个值 x 给出，为其点权 $\leqslant x$ 的最远祖先。

离线可以通过 Kruskal 算法直接转化为【HNOI2012】永无乡。

在线改为用可持久化线段树合并，每次先找到子树的根结点再直接在其可持久化线段树上查询即可。

时间复杂度 $\Theta(m \log m + (n+q) \log n)$。

Problem (子树内区间最远点对)

略。

Problem (子树内区间最远点对)

略。

Solution

对于每个子树都维护一棵与树上的最远点对相同的线段树，使用线段树合并即可。

Problem (雨天的尾巴)

略。

Problem（【NOI2020】命运）

略。

Problem (【JOISC2021】最F の記者 4)

略。

Problem（【JOISC2021】星座 3）

略。

1 线段树入门

2 单侧或条件递归

3 动态开点与可持久化

4 合并与分裂

5 类似数据结构
- 树状数组
- 猫树
- 01-trie
- 压位 trie
- vEB 树

6 基于线段树的一些算法

7 树结构应用

我们知道值域为 m 的 01 背包可以用 bitset 做到 $\Theta(m/w)$ 插入一个物品。

我们知道值域为 m 的 01 背包可以用 bitset 做到 $\Theta(m/w)$ 插入一个物品。

Problem (带时间 01 背包)

有 n 个物品 (l_i, r_i, x_i)，表示第 i 个物品在时刻 l_i 出现直到时刻 r_i，大小为 x_i。

q 次询问 a, b，求时刻 a 是否能选出若干物品使得总大小和为 b，满足 $b \leqslant m$。

m 与 n 同阶，$1 \leqslant n \leqslant 10000$。

Solution

建立叶子结点个数为时间长度（离散化后为 $\Theta(n)$）的线段树，对于一个物品，我们在线段树上定位出来的结点维护的集合中加入对应物品。

Solution

建立叶子结点个数为时间长度（离散化后为 $\Theta(n)$）的线段树，对于一个物品，我们在线段树上定位出来的结点维护的集合中加入对应物品。

我们在线段树上进行 dfs，每次进入一个结点时在父亲结点的基础上加入这个结点维护的集合中的物品，那么 dfs 到叶子结点的时候维护的背包就是对应时间的背包。

Solution

建立叶子结点个数为时间长度（离散化后为 $\Theta(n)$）的线段树，对于一个物品，我们在线段树上定位出来的结点维护的集合中加入对应物品。

我们在线段树上进行 dfs，每次进入一个结点时在父亲结点的基础上加入这个结点维护的集合中的物品，那么 dfs 到叶子结点的时候维护的背包就是对应时间的背包。

时间复杂度 $\Theta(nm\log n/w)$。

Problem (【清华集训 2014】玄学)

给定模数 m，有 q 个操作：

1. 给定一个操作：将区间 $[l, r]$ 内的数 x 都变成 $(ax + b) \bmod m$。
2. 询问当只进行 $[u, v]$ 内的操作时第 k 个数的值。

强制在线。

在课件中已有题解。